КІРОВОГРАДСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ
УДОСКОНАЛЕННЯ ВЧИТЕЛІВ

О. ХМУРА

ПОЗАКЛАСНА РОБОТА З МАТЕМАТИКИ

КІРОВОГРАДСЬКЕ ОБЛАСНЕ ВИДАВНИЦТВО

КІРОВОГРАДСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ
УДОСКОНАЛЕННЯ КВАЛІФІКАЦІЇ УЧИТЕЛІВ

О. О. ХМУРА

ПОЗАКЛАСНА РОБОТА З МАТЕМАТИКИ

(МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК ДЛЯ ВЧИТЕЛІВ)

КІРОВОГРАД
1960

ЗНАЧЕННЯ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ В ШКОЛІ

Немало школярів вважали і вважають математику нецікавим, сухим предметом. Інтерес учнів до цього предмету можна викликати якісним викладанням його та шляхом проведення продуманої системи позакласних заходів.

«Зацікавити розум дитини — ось що є одним із важливих пунктів нашої доктрини, і ми нічим не нехтуєм, щоб прищепити учневі смак, ми б сказали, навіть пристрасть до навчання», — писав видатний російський математик М. В. Остроградський.

Позакласні заняття дають можливість ширше пропагувати значення математичної науки, вони є важливим засобом для збудження інтересу до знань, дозволяють поглибити цей інтерес, прививають любов до математики.

Правильно організована позакласна робота з математики сприяє більш глибокому засвоєнню учнями програмного матеріалу, бо вона дає можливість організувати розв'язування цікавих і досить важких задач, що розвивають кмітливість й математичне мислення учнів, вивчати елементи історії математики, знайомити учнів з життям і діяльністю славетних математиків, особливо вітчизняних, з питаннями вищої математики, доступними для учнів, питаннями практичного застосування математики тощо.

В тісному зв'язку з позакласною роботою можуть бути організовані конструктивні роботи по моделюванню найрізноманітніших наочних посібників.

Позакласна робота відіграє важливу роль у розкритті практичного значення математики, у здійсненні політехнічного навчання, поскільки на позакласних заняттях можна розв'язувати задачі, зв'язані із застосуванням

математики на практиці; тут слід провадити роботу над виробленням в учнів практичних умінь і навичок, в тому числі конструктивних навичок, навичок з моделювання, виготовлення математичних приладів і моделей фігур, а також навичок робити необхідні при цьому розрахунки.

Велика роль позакласних занять у справі привиття учням навичок раціональних обчислень, вироблення в них смаку до інструментальних обчислень (лічильна лінійка, графіки, номограми і ін.).

Важлива ділянка позакласних занять — вимірювальні роботи на місцевості з допомогою найпростіших геодезичних інструментів.

Робота в гуртку, підготовка математичного вечора і інші види позакласних робіт сприяють вихованню в школярів почуття колективізму.

Вивчаючи біографії наших видатних учених, дізнаючись про досягнення математики в нашій країні і про ведучу роль радянських математичних шкіл в світовій науці, учні відчувають гордість за свою Батьківщину. Таким чином виховується в них почуття радянського патріотизму, відбувається формування матеріалістичного світогляду.

Позакласна робота з математики допомагає вчителю у справі здійснення естетичного виховання учнів.

Позакласні заняття приносять велику користь і самому вчителю, бо, готуючись до заняття математичного гуртка, вчитель повинен детально переглянути відповідну літературу, розширивши і поглибивши таким чином свої знання в галузі елементарної математики, її історії тощо. А це сприяє і підвищенню якості уроків даного вчителя.

Ось чому вчитель математики не повинен обмежувати свою діяльність лише навчально-виховною роботою на уроці, а й організовувати різноманітні позакласні заняття учнів.

За останні роки позакласна робота проводиться майже в кожній школі області. В ряді шкіл, наприклад, в школах №№ 4, 5, 6, 7, 11, 14 м. Кіровограда, №№ 1, 2, 4 м. Олександрії, Богданівській СШ, Знам'янського району, Онуфріївській СШ, Онуфріївського району, Червонокам'янській СШ, Добровеличківській СШ, Добровеличківського району та ін., ця робота поставлена на належному рівні.

Але кращий досвід їх роботи, на жаль, майже не поширюється і не стає надбанням вчителів математики шкіл області.

Даний посібник є спробою узагальнити досвід роботи математичних гуртків, організації та проведення математичних вечорів і олімпіад в школах: № 6 (вчителі Зеленецька і Сідова) і № 11 (вчителі Єлісаветська і Марущак) м. Кіровограда; № 1 (вчитель Покладович) і № 2 (вчитель Львовський) м. Олександрії; Богданівській СШ, Знам'янського району (вчителі Ткаченко і Шевченко); Онуфріївській СШ (вчитель Голіцин); Червонокам'янській середній школі (вчитель Куженко).

МАТЕМАТИЧНІ ГУРТКИ

Робота гуртків в школі доповнює роботу на уроках, задовольняє інтереси і запити учнів, які виходять за межі навчальної програми. Проте робота в гуртку будується на основі знань, що їх одержують учні в процесі навчання, і тому зміст її неминуче зв'язується з програмним матеріалом, що вивчається на уроці.

Заняття гуртка плануються в загальношкільному плані і відбуваються два рази на місяць.

При плануванні роботи враховується побажання членів гуртка, а також те, що вивчено за минулі роки з даним складом учнів.

Згідно з планом, членам гуртка пропонується матеріал для підготовки до наступних занять.

Ініціатором і організатором позакласних занять з математики повинен бути сам вчитель: він складає план роботи математичного гуртка на рік і готується до проведення занять згідно плану, наполегливо готує учнів до усвідомлення корисності організації роботи математичного гуртка.

З метою такої підготовки перш за все вчитель може використати урок з математики.

Наприклад, в V—VI класах майже на кожному уроці арифметики, під час розв'язування задач, учні займаються усним рахунком. Інколи в кінці чи на початку уроку можна спеціально відвести 3—5 хвилин на усну лічбу з питань цікавої арифметики.

Наприклад, вчитель пропонує таку вправу: «Нехай кожен задумає про себе яке-небудь двозначне число. Помножте задумане число на 3. До добутку додайте 19. До одержаної суми додайте ще 41. Результат поділіть на 3. Відніміть задумане число» [x, $3x$, $3x+19$, $3x+60$; $x+20$, 20]. Тепер вчитель «відгадує», який результат одержався. Зви-

чайно, що учням хочеться оволодіти цією математичною розвагою. Вчитель охоче йде назустріч: виконується ще вправа, але в ній інший порядок дій, інший числовий матеріал і інший результат.

Клас від подібних вправ залишається надзвичайно враженим. На одному із слідуючих уроків учитель під час усної лічби пропонує учням, наприклад, таку вправу: «Задумайте ціле число, яке не перевищує 20. Помножте його саме на себе. Додайте до результату подвоєне задумане число, додайте ще одиницю»

$$[x,\ x^2,\ x^2 + 2x,\ x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2].$$

Вчитель запитує кого-небудь з учнів результат, після чого повідомляє задумане ним число. Потім іншого учня запитує результат і теж повідомляє задумане ним число і т. д.

Вчитель пропонує ще вправу: «Задумайте число, яке не перевищує 25. Помножте його саме на себе, відніміть від результату почетверенне задумане число і до різниці додайте 4». Знову вчитель відгадує ряд задуманих чисел. І знову учні залишаються під позитивним впливом уроку.

На окремих уроках в тісному зв'язку з програмою вчитель розглядає відомості з вчення про число.

Особливий інтерес в учнів викликають відомості про числа велетні.

1. Якщо мільйон людей візьметься за руки, то утвориться ланцюг завдовжки від Києва до Архангельська, а мільйон сірникових коробок, покладених одна на одну утворюють стовп у 15 *км*.

2. Мільярд хвилин — це 19 століть.

3. Книга в трильйон сторінок була б завтовшки 50 000 *км*, прочитати її можна було б за 30 000 000 років, а для перевезення її потрібно було б 1000 великих вантажних составів.

4. І. М. Первушін у 1873 р. довів, що число $2^{2^{23}} + 1$ є складовим, бо ділиться на $167\,772\,161 = 5 \cdot 2^{25} + 1$. Воно має 2 525 223 цифри, а для написання його потрібен був би рядок завдовжки 5 *км* або книга в 1000 сторінок.

5. Найбільшим числом, що зустрічається в науці, є число Ск'юза, яке приблизно дорівнює — $10^{10^{10^{34}}}$ або

$$10^{10000000000000000000000000000000000}$$

6. В жовтні 1952 року електронна машина знайшла просте число, в якому число цифр дорівнює $2^{2281} - 1$.

Це найбільше з відомих в наш час простих чисел.

Так вчитель продовжує і далі включати цікаві задачі.

Для зацікавленості арифметикою вчитель пропонує деякі вправи для занять дома.

Наприклад. 1. Записати число 7 за допомогою п'яти двійок. 2. Записати 100 за допомогою чотирьох дев'яток. 3. Записати 1000 за допомогою п'яти одиниць. 4. Накреслити квадрат, що містить дев'ять кліток, і написати в клітках всі числа від 11 до 19, щоб сума чисел в кожному рядку, в кожному стовпчику із кута на кут (по діагоналі) дорівнювала 45 і т. д.

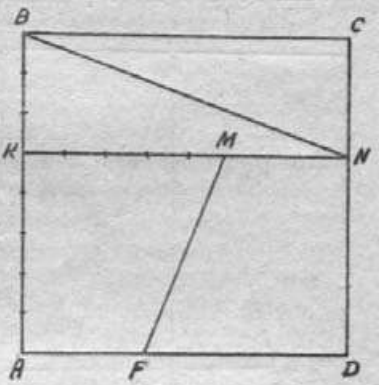

Рис. 1.

У VIII класі при виведенні формул для обчислення площ квадрата і трикутника вчитель пропонує, наприклад, рівність $8 \cdot 8 = 65$.

Дано квадрат АВСД, сторона якого дорівнює 8 одиницям (рис. 1). В квадраті проведені прямі KN, MF і NB так, як вказано на рисунку 1. Ці прямі розбивають квадрат на 4 фігури: 2 з них — рівні прямокутні трапеції і 2 — рівні прямокутні трикутники. Із одержаних чотирьох фігур складена нова фігура (рис. 2). Вважаючи нову фігуру за трикутник, знаходимо його площу. Площа трикутника дорівнює $10 \cdot 13 : 2 = 65$. Учні повинні знайти помилку в доведенні і довести, що одержана фігура не буде являтися трикутником. Учні з великим бажанням займаються знаходженням помилки, допущеної при доведенні та побудові.

В X класі, при проходженні теми «Нерівності» вчитель може дати учням такий приклад. Довести, що $2 > 3$. Дана нерівність:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8}; \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Прологарифмувавши останню нерівність, одержимо

$$2 \log_{10} \frac{1}{2} > 3 \log_{10} \frac{1}{2}.$$

Скоротивши обидві частини останньої нерівності на один і той же множник $\log_{10} \frac{1}{2}$, одержимо $2 > 3$.

Подібні вправи не лише є стимулом для організації математичного гуртка, вони примушують учнів знову і знову згадувати все те, що вони вивчали раніше, і, таким чином, допомагають учням більш грунтовно закріпити навчальний матеріал і усвідомити, що помилка в міркуванні приводить до неправильних висновків.

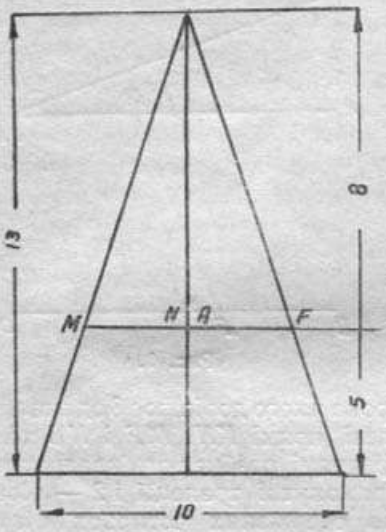

Рис. 2.

З метою зацікавленості учнів математикою необхідно на уроках і в домашніх завданнях пропонувати також задачі на застосування математичних знань на практиці та при вивченні інших наук.

Прикладом таких задач можуть служити:

З а д а ч а 1. Ділянка землі прямокутної форми, довжина якої 96 *м*, а ширина 25 *м*, засіяна буряком і картоплею. Буряки займають $\frac{1}{4}$ частину площі ділянки, картопля — решту частини ділянки. Скільки квадратних метрів займає картопля?

З а д а ч а 2. На географічній карті з масштабом 1 : 10 000 віддаль між пунктами дорівнює 12 *см*. Знайти віддаль між пунктами в дійсності.

З а д а ч а 3. Скільки важить бронзовий телефонний дріт довжиною 1,25 *км*, якщо товщина його дорівнює 2,7 *мм*, а питома вага дорівнює 9? Відп. 64,4.

З а д а ч а 4. Середня густина земної кулі 5,54 *г*. Знайти масу землі, якщо середній радіус її дорівнює 6371 *км*.

Відп. 6.10^{24}.

З а д а ч а 5. Аеростат діаметром 2 *м* видно під кутом 4′34″. Як далеко він знаходиться від місця спостереження?

Відп. 1505 *м*.

В V і VI класах можна використати задачі 1 і 2; в VII і VIII класах — задачі 1, 2, 3, 4; в IX і X класах — задачі 1, 2, 3, 4, 5.

Проводячи з учнями виховну годину, учитель звертає увагу на значення математики в народному господарстві, коротко висвітлює значення математики в сучасній техніці, підкреслює, що «для інженера математика є інструмент такий же, як зубило і молоток для слюсаря, сокира і пилка для тесляра» (О. М. Крилов). В інший раз вчитель розповідає, що проектування гідроелектростанцій і каналів, заводів і фабрик, міст і сіл, залізниць і метро, заводських і фабричних верстатів і крокуючих екскаваторів, потужних паровозів і електровозів, літаків і теплоходів починається з різноманітних вимірювань, складних математичних розрахунків, з складання багатьох креслярських рисунків.

Дуже важливо повідомити учням, що величезні досягнення радянської математичної науки в значній мірі сприяли створенню і запуску в СРСР першого в світі штучного супутника Землі, космічної ракети в напрямку Місяця, спущенню на воду першого в світі атомного криголама «Ленін», який спроможний ламати лід товщиною в 2 метри і плавати цілий рік без заходу в порт для поновлення палива. Досягнення в математиці сприяли побудові потужних 40-тонних самоскидів і гігантських екскаваторів, які працюють на будівництві електростанцій і каналів, у вугільних розрізах і на добуванні руди, створенню передової соціалістичної сільськогосподарської техніки, завдяки якій в 1958 році колгоспи і радгоспи всієї країни достроково продали державі 3 мільярди 491 мільйон пудів зерна, що на 1 мільярд 329 мільйонів пудів більше, ніж в 1957 році.

Побудова в 1958 році Волзької гідроелектростанції ім. В. І. Леніна потужністю в 2 мільйони 300 тисяч кіловат (це в п'ять разів більше, ніж потужність всіх електростанцій царської Росії), Челябінської комсомольської домни, найпотужнішої в СРСР і в Європі були б немислимі без досягнення радянських математичних шкіл.

Вчитель може навести приклади застосування сучасних радянських лічильних машин.

Наприклад, при складанні метеорологічного прогнозу спеціалісти враховують на поверхні землі і на різних висотах температуру, тиск повітря, швидкість і напрям вітру, вологість і т. д. Все це приймається до уваги не лише для даної місцевості, але дані ці враховуються і в багатьох інших місцях. Адже погода, наприклад, в Києві завтра залежить у певній мірі від того, яка була погода в Ленінграді, Москві, Одесі й інших містах вчора. В цілому, при складанні метеорологічного прогнозу доводиться виконувати до 800 000 множень, якщо їх виконувати вручну по одному множенню за хвилину, то одній людині потрібно було б для цього 5 років. Лічильна машина (БЕСМ) затрачає на ці обчислення біля двох хвилин.

Ще приклад. При складанні карт місцевості інколи доводиться розв'язувати систему рівнянь з декількома десятками, а то і сотнями невідомих. На виконання цієї роботи необхідно затратити багато часу сотням людей. БЕСМ виконує ці обчислення дуже швидко. Задача з 800 рівняннями, яка вимагає до 250 мільйонів арифметичних дій, на електронній лічильній машині роз'язується менш ніж за 20 годин.

В повсякденному житті такі лічильні машини знаходять широке застосування, заміняючи собою працю десятків тисяч людей. Так, наприклад, для підготовки всіх даних по зарплаті робітникам невеликого заводу, вимагається праця 45 бухгалтерів на протязі одного тижня. Радянські лічильні машини виконують цю роботу за 16 годин і обслуговують їх 3—4 людини. Сучасні електронні лічильні машини виконують обчислення не в звичній для нас десятковій системі числення, а в двоїчній системі числення.

В десятковій системі числення деяке число N записується у вигляді

$$N = a_0 10^0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \ldots + a_{-1} 10^{-1} + \\ + a_{-2} 10^{-2} \ldots + \ldots$$

причому a_i можуть набувати значень 0,1,...,9. Число сто двадцять п'ять записується 125 ($a_2 = 1, a_1 = 2, a_0 = 5$). Аналогічне число N у двійковій системі може бути записане у вигляді

$$N = b_0 2^0 + b_1 2^1 + b_2 2^2 + \ldots + b_{-1} 2^{-1} + b_{-2} 2^{-2} + \ldots,$$

де

b_i дорівнює нулеві або одиниці.

Так, число 5 запишеться у вигляді 101 ($b_2 = 1$, $b_1 = 0$, $b_0 = 1$), а число 125 — 1 111 101. Правило додавання таке: $0 + 0 = 0$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 10$, таблиця множення також дуже проста: $0 \times 0 = 0$, $1 \times 0 = 0 \times 1 = 0$, $1 \times 1 = 1$. На годині класного керівника, вчитель може провести і таку бесіду:

Виникнення алгебри та її застосування[1].

В 820 році узбецький учений Мухаммед Аль-Хорезмі написав книгу, яка називалась «Про обчислення з допомогою аль-джебр-в-аль-мукабала».

«Аль-джебр» в перекладі означає «восстановление», тобто перетворення від'ємного числа в додатне при перенесенні його з однієї частини рівняння в другу.

Від стародавнього арабського слова «альджебр» й походить латинське слово «алгебра». З часу виходу книги Мухаммеда Аль-Хорезмі алгебра стає окремою галуззю математики.

Вчені-математики, які жили в середніх віках, при розв'язуванні задач всі дії та величини описували словами. Лише в XV столітті з'являються знаки + і —.

Букви вперше почав застосовувати в алгебрі французький вчений Віет. Пізніше, в XVII ст., його співвітчизник Декарт запропонував позначати дані в умові задачі величини першими буквами латинського алфавіту (a, b, c), а невідомі величини — останніми (x, y, z).

Для чого ж потрібно знати алгебру?

Почнемо з фізики, яку ти вивчаєш у школі. Тобі, безумовно, доводиться часто зустрічатися з різними формулами. Вони ж ніщо інше, як алгебраїчний вираз. В задачах з фізики одні величини, які входять у формулу, відомі, інші ж треба визначити.

Таким чином, задача з фізики зводиться до розв'язування алгебраїчного рівняння. Це тільки в школі.

А скільки задач, більш складних і важких доводиться розв'язувати на кожному кроці інженерам та вченим! Тут алгебра конче потрібна. Скажемо, проектується міст через ріку. На допомогу інженерові приходить алгебра. За відомими формулами, виведеними ученими, інженер проводить потрібні йому розрахунки та враховує все те, що може порушувати стійкість мосту.

---

[1] Газета «Юний ленінець» від 18 вересня 1959 р.

У вересні місяці 1959 року друга радянська космічна ракета досягла поверхні Місяця. Нашим ученим вдалося точно розрахувати час польоту ракети, її траєкторію. Цього не можна було б зробити без алгебри.

Ближчим часом всі складні обчислення будуть робити тільки машини. Але хіба це значить, що алгебра стане непотрібною? Безумовно, ні. Адже машини працюють по заздалегідь складеній програмі, а програму можуть скласти тільки люди, які добре знають математику.

Р. М. Гіліс — інженер,
Т. І. Лосінська — старший лаборант, співробітник Інституту математики Академії наук УРСР

Де потрібна алгебра?

А ось де, ось кому —

Синоптику

«Яка буде завтра погода» — часто хочеш знати ти. Але при цьому, звичайно, не згадуєш про алгебру. А даремно. При складанні прогнозів співробітникам бюро погоди та спеціальних інститутів потрібно знати температуру повітря, вологість його, атмосферний тиск, силу вітру та багато інших елементів погоди. Між ними існує складний взаємозв'язок. Наприклад, зміна температури приводить до зміни тиску, а це в свою чергу змінює швидкість вітру та інше.

Тільки знаючи закони фізики, застосовуючи математику, можна визначити стан цих елементів у майбутньому, тобто дізнатися про очікувану погоду.

Є. Онуфрієнко, старший інженер-синоптик Київського бюро погоди.

Медику

Без алгебраїчних обчислень важко було б виводити загальні закони фізіології, біофізики, біохімії та інших природничих наук.

Великий російський фізіолог І. М. Сєченов з допомогою алгебри розрахував, на якій висоті уже не можуть жити люди і тварини. Його теоретичні розрахунки підтвердили досліди.

Ще один приклад. По спеціальним формулам, складеним на підставі алгебраїчних правил, підбирають і окуляри для людей.

Все те, що робиться в лабораторіях і клініках, підготовлено алгебраїчними обчисленнями.

А. З. Колчинська, старший науковий співробітник, кандидат медицинських наук.

Робітнику

Ще недавно на уроках алгебри у мене теж виникло питання, навіщо учити цей предмет. А тепер я бачу, що без знання алгебри мені було б зараз важко працювати. Вона— мій хороший помічник.

Після закінчення середньої школи в минулому році, я прийшов на завод «Транссигнал». Тепер працюю в експериментальному цеху. Робота у нас цікава. Цех виготовляє за кресленнями нові зразки залізничної електротехнічної апаратури. В процесі роботи доводиться вносити в креслення зміни, самому робити додаткові обчислення. Як же тут можна обійтися без арифметики, геометрії, алгебри? Вони дуже потрібні нам при розмітці деталей, обчисленні кутів та багатьох інших роботах.

О. Маліцький, слюсар-складальник.

Конструктору

При розрахунках машин, механізмів завжди застосовуються буквенні позначення. Важко уявити собі, наскільки ускладнилася б праця без них. Адже під будь-яким буквенним позначенням мається на увазі величезне число, а чисел, коли робиш розрахунки дуже багато і обчислення віднімало б у нас місяці і роки.

В. С. Кононов, замісник головного конструктора машинобудівельного заводу «Більшовик».

та багатьом іншим.

Так поступово і наполегливо вчитель переконує учнів у необхідності створення математичного гуртка для більш глибокого ознайомлення з математикою і її практичним застосуванням.

Математичні гуртки в згаданих раніше школах працювали в напрямку поглиблення знань учнів з математики, розширення їх світогляду, зацікавлення їх математикою і прищеплення їм окремих практичних навичок та вмінь в галузі використання знань з математики в практичному житті.

З цією метою на заняттях гуртків проводилось вимірювання на місцевості за допомогою геодезичних інструментів, організовувались екскурсії на промислові й сільськогосподарські об'єкти, виконувались практичні роботи в шкільній майстерні, складались різні графіки і використовувались для розв'язання деяких практичних питань, відбувалось ознайомлення з обчислювальними механізмами (арифмометром, логарифмічною лінійкою, російською рахівницею) і практичним використанням їх; розв'язувалися різноманітні математичні софізми, задачі підвищеної трудності з елементарної математики, нескладні задачі та питання з вищої математики тощо; займались цілим рядом доступних для учнів питань з фізики, хімії, техніки, механіки, астрономії, військової справи, геодезії, фізичної географії, електротехніки, машинознавства, побуту та ін., розв'язання яких зв'язане з практичним застосуванням математики.

Члени математичних гуртків допомагали школам у виготовленні різних моделей, таблиць, графіків, портретів тощо. В гуртках учні стали активними учасниками створення нових конструкцій математичних приладів, внаслідок чого математичні кабінети цих шкіл значно збагатилися за рахунок саморобного наочного приладдя, наприклад: учні Олександрійської СШ № 1 виробили:

1. Прилади для ілюстрації доведення теорем: а) про поверхню та об'єм конуса й циліндра; б) про довжину кола.

2. Прилади для ілюстрації: а) властивостей сторін трикутника, що лежать проти гострого й тупого кутів;

б) паралельного проектування;

в) майже всіх теорем з курсу геометрії IX класу;

г) всіх можливих випадків взаємного розташування двох кіл;

д) властивостей дотичної до кола;

е) радіанного вимірювання дуг і кутів.

Залучення учнів до такого роду робіт виробило в них уміння й навички читати креслярські рисунки, користува-

тися наближеними обчисленнями для практичних цілей. Крім того, в процесі роботи учні набували певні практичні навички в паянні, обробці дерева, металу і в інших виробничих процесах.

Організації гуртків у згаданих школах сприяла зацікавленість значної частини учнів математикою, що стало наслідком високоякісних уроків, проведених учителями математики: Покладовичем, Зеленецькою, Ткаченком, Львовським, Куженком, Голіциним та ін., які час від часу пропонували учням на уроках і додому цікаві задачі, задачі практичного змісту, софізми[1], математичні фокуси та ін. Нерідко вони включали в свої розповіді на уроках і історичні справки, вдавалися в короткі екскурси, зв'язані з виучуваним матеріалом.

Організувавши математичні гуртки, ці вчителі особливу увагу приділяли тим формам гурткових занять, які дають можливість переважній більшості учнів проявити свою ініціативу, самостійність і розраховані на активну творчу роботу всіх членів гуртка.

З метою залучення всіх членів математичного гуртка до активної роботи в деяких школах, наприклад, Олександрійській середній школі № 1, Червонокам'янській середній школі та ін., були створені постійні секції, які займалися:

1. Збиранням матеріалів, що ілюструють застосування математики:

а) в практиці промислового і сільськогосподарського виробництва;

б) в побуті.

2. Збиранням народних задач і прийомів усних обчислень.

3. Конструюванням і виготовленням наочних посібників з математики і обладнання до проведення математичних вечорів.

4. Підготовкою доповідей і рефератів.

5. Збиранням історичного матеріалу з математики.

---

[1] Софізм [грецьке sophisma — вигадка, хитрість]. Формально правильний, але хибний по суті умовивід, що грунтується на навмисно неправильному доборі вихідних положень в ланцюзі міркувань.

Якщо в математиці шляхом логічного ланцюга міркувань, в одній ланці якого навмисно допущена помилка, намагаються переконати когось в невірності математичного твердження, то перед нами математичний софізм.

Організація таких секцій не лише активізувала роботу в гуртку і робила її більш масовою і цікавою, але й виробляла у них самостійність, вміння відібрати найбільш важливе серед численного другорядного, розвивала критичний підхід до своєї роботи і роботи товаришів.

Матеріали секцій служили джерелом для заповнення відповідних розділів математичної газети.

Особливо великий інтерес викликали в членів гуртка розповіді і практичні роботи інженерно-технічних працівників передовиків промисловості і сільського господарства, та спеціалістів інших професій, тому залучення їх до роботи математичних гуртків є одним із додаткових і ефективних засобів розв'язування завдань політехнічного навчання учнів.

План роботи математичного гуртка в кожній із згаданих раніше шкіл складається відповідно до того, учні яких класів будуть об'єднані в даному гуртку. Так, наприклад, у план роботи гуртка учнів VIII—X класів одночасно включалися питання цікаві й доступні всім членам гуртка, а також питання, посильні лише для учнів IX і X класів, або навіть тільки X класу. Коли на засіданні гуртка стояли питання, що торкаються учнів X класів, то на заняття залишаються тільки десятикласники.

Наведемо примірний план роботи математичного гуртка учнів 8—10 *кл.* Богданівської СШ, Знам'янського району (вчителі Ткаченко і Шевченко).

I. ОРГАНІЗАЦІЙНА РОБОТА

1. Провести запис бажаючих працювати в математичному гуртку — 5.IX.
2. Скласти план роботи математичного гуртка на навчальний рік — 7.IX.
3. Загальні збори членів математичного гуртка.

Повістка

1) Мета, завдання і план роботи гуртка.
2) Вибори ради гуртка.
3) Вибори редколегії газети «Математика і життя» — 10.IX.
4. Загальні збори членів гуртка.

Повістка

1) Звіт про роботу редколегії газети «Математика і життя».

2) Про проведення математичного вечора для учнів IX і X класів — 15.XII.

II. НАВЧАЛЬНА РОБОТА

1. Історія математичних символів. Розв'язування ускладнених задач. Математичні софізми.— 20.IX.
2. Російська математична школа. Розв'язування ускладнених задач. Математичні софізми.— 28.IX.
3. Радянська математична школа. Розв'язування задач підвищеної трудності. Математичні софізми.— 10.X.
4. Номограми і їх використання на практиці — 24.X.
5. Ознаки подільності на будь-яке число — 10.XI.
6. Прийоми швидкої лічби. Розв'язування задач підвищеної трудності — 24.XI.
7. Графічна алгебра — 10.XII.
8. Історія логарифмів. Розв'язування задач підвищеної трудності — 24.XII.
9. М. І. Лобачевський і його геометрія — 5.I. Математичні софізми.
10. Історія і обчислення числа π. Розв'язування історичних задач — 25.I.
11. Сферична тригонометрія. Розв'язування цікавих задач — 10.II.
12. Пантограф і користування ним — 25.II.
13. Арифмометр і користування ним — 10.III.
14. Математичні таблиці і їх використання у виробничій практиці — 25.III.
15. Лічильні лінійки і використання їх в практиці інженерно-технічних працівників — 10.IV.
16. Сучасні лічильні машини — 25.IV.

III. ПРАКТИЧНА РОБОТА ЧЛЕНІВ ГУРТКА

1. Виготувати стенд «Видатні вітчизняні математики». (Чебишев, Остроградський, Марков, Ковалевська, Лобачевський, Ляпунов, Виноградов, Лузін, Понтрягін, Колмогоров, Олександров, Крилов, Смірнов, Соболев).

До портретів вчених написати біографічні справки і їх вклад в світову науку — 1.XII.

2. На протязі року провести дві екскурсії на теми, практичне застосування яких можна показати в умовах місцевого оточуючого виробництва — 12.XII і 12.IV.

3. Підготувати і провести математичний вечір на тему: «Математика і життя» — 18.IV.

4. Випустити стінну газету «Математика і життя» з такими розділами:

а) передова;

б) навчально-науковий відділ;

в) історичний відділ;

г) математика і життя;

д) російські і радянські вчені;

е) цікаві задачі, складені самими учнями.

5. Провести такі геодезичні роботи на місцевості:

а) знімання ділянки астролябією з обчисленням координат вершин — 28.XI;

б) розв'язування прямокутних трикутників, побудованих на місцевості, з застосуванням логарифмічної лінійки, — 24.IV.

6. Провести практичну роботу по визначенню ваги купи зерна, вугілля, піску, землі — 5.X.

7. Навчити учнів визначати живу вагу тварин — 15.XI.

8. Організувати роботу по конструюванню і виготовленню навчальних посібників.

Наводимо докладний план роботи математичного гуртка десятих класів (він, звичайно є орієнтовним) Олександрійської СШ № 2 (вчит. Р. І. Львовський). (В плані роботи цього гуртка й інших, з метою полегшення їх використання, наведені розв'язування окремих вправ, доведення теорем та тверджень, пояснення софізмів тощо).

Заняття I

1. Організаційні питання.

2. Доведення формули розміщень з «*m*» елементів по «*n*» методом математичної індукції.

$$A_m^n = m(m-1)\ \ldots\ (m-n+1). \qquad (1)$$

Помічаємо, що $A_m^1 = m$, і таким чином, формула (1) справедливо при $n = 1$. Припустимо, що $A_m^k = m(m-1)\ldots$

$(m-k+1)$, де $k<m$. Доведемо, що $A_m^{k+1}=m(m-1)\ldots(m-k)$. Щоб одержати всі розміщення з m елементів по $k+1$ елементів, досить взяти всі розміщення з m елементів по k і до кожного з них приписати в кінці кожен із $m-k$ елементів, що залишилися. Неважко переконатися, що складені таким способом розміщення з m елементів по $k+1$ всі різні і, крім того, будь-яке розміщення з m елементів по $k+1$ міститься серед одержаних. Виходить, що $A_m^{k+1}=A_m^k\cdot(m-k)=m(m-1)\ldots(m-k)$.

3. а) Обчислити $C_{\text{к}}^6$, якщо відомо, що $C_{18}^k=C_{18}^{k+2}$

б) Знайти остачу від ділення 37^6 на 7.

4. Довести, що будь-яке ціле число карбованців, більше 7, можна заплатити без здачі грошовими білетами вартістю в 3 і 5 карбованців.

Розв'язування. Для 8 карбованців твердження справедливе. Нехай твердження справедливе для К карбованців, де К — ціле число більше або рівне 8.

Можливі 2 випадки : 1) K карбованців платиться лише білетами вартістю в 3 карбованці і 2) K карбованців платиться грошовими білетами, серед яких є хоч один білет вартістю в 5 карбованців.

В першому випадку білетів вартістю в 3 крб. повинно бути не менше трьох, так як в цьому випадку $K>8$.

Щоб заплатити $K+1$ крб., замінимо три білети вартістю в 3 крб. двома білетами вартістю в 5 крб. У другому випадку для плати $K+1$ крб. замінимо один білет вартістю в 5 крб. двома білетами вартістю в 3 крб.

4. Математичний софізм: «1 = 2».

Нехай $x=y$; помноживши обидві частини рівності на x, а потім віднявши y^2, дістанемо:

$$x^2-y^2=xy-y^2.$$

Розкладемо на множники:

$$(x-y)\cdot(x+y)=y(x-y),\ x+y=y,\ y+y=y,$$
$$y=2y$$
$$2=1.$$

Цей софізм, як і всі інші, приводиться з метою повторення раніше пройденого матеріалу. Гуртківці повинні знайти помилку і докладно пояснити, в чому вона полягає.

Вправи для роботи дома:

1. Вивести формулу перестановок (P_n) методом математичної індукції.

2. Довести, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

Розв'язування. Сума $1^3 + 2^3 + 3^3$ ділиться на 9.

Отже, твердження справедливе, коли першим з трьох послідовних натуральних чисел є 1.

Нехай сума $\kappa^3 + (\kappa + 1)^3 + (\kappa + 2)^3$, де κ — деяке натуральне число, ділиться на 9. Сума

$(k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 = [k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3] + 9(k^2 + 3k + 3)$ являє собою суму двох доданків, кожен з яких ділиться на 9, а тому також ділиться на 9.

3. Математичний софізм: «2 = 3».

Зміст: $4 - 10 = 9 - 15$.

$$4 - 10 + 6\frac{1}{4} = 9 - 15 + 6\frac{1}{4};$$

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2;$$

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2};$$

$$2 = 3$$

Заняття 2

1. Самостійна робота учнів по виведенню формул: а) вивести формулу комбінацій (C_m^n) методом математичної індукції.

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \qquad (1)$$

Помічаємо, що $C_m^1 = m$, і таким чином, при $n = 1$ формула (1) справедлива.

Припустимо, що $C_m^k = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}$

Доведемо, що $C_m^{k+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)\cdot(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \cdot (k+1)}$

Щоб одержати всі комбінації з m елементів по $\kappa + 1$, випишемо всі комбінації з m елементів по κ і до кожної з них в якості $(\kappa + 1)$ — го елемента приєднаємо кожен з $m - \kappa$ елементів, що залишились. Очевидно, що таким шляхом будуть одержані всі комбінації з m елементів по

$k + 1$, але кожна з них одержиться $k + 1$ разів. Дійсно, комбінація $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$ одержиться, коли до комбінації $a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}$ приєднається елемент a_1, коли до комбінації $a_1, a_3, \ldots, a_k, a_{k+1}$ приєднається елемент a_2 і т. д., коли, нарешті, до комбінації $a_1, a_2, \ldots, a_k$ приєднається елемент a_{k+1}. Таким чином,

$$C_m^{k+1} = C_m^k \cdot \frac{m-k}{k+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k(k+1)}$$

б) $C_m^n = \frac{m-n+1}{n} \cdot C_m^{n-1}$;

в) $C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$

Під час самостійного виконання завдань вчитель слідкує за роботою учнів, в разі необхідності дає їм вказівки; учень, що раціонально розв'язав задачу раніше інших, викликається до дошки для розв'язання даної задачі.

2. а) Що більше: A_n^{n-1} чи P_n?

б) Обчислити суму всіх коефіцієнтів в розкладі бінома $(2x + 3y)^5$.

3. Математичний софізм: «Будь-які два числа рівні між собою».

Позначимо різницю $x - y = z$; тоді

$$x = y + z$$

Помноживши обидві частини рівності на $(x - y)$, дістанемо:

$$x^2 - xy = xy + xz - y^2 - yz.$$

Віднявши від обох частин одержаної рівності по xz, матимемо:

$$x^2 - xy - xz = xy - y^2 - yz$$

Потім, після винесення за дужки, маємо $x(x - y - z) = y(x - y - z)$, а скоротивши на $(x - y - z)$, дістанемо: $x = y$, тобто будь-які два числа рівні між собою.

У чому ж помилка?

Учні без труднощів розглядують, що ділення виконано на нуль.

3. Практичні роботи в шкільній майстерні[1] (Види практичних робіт, що їх виконують гуртківці в шкільній майстерні, додаються в кінці даного плану гуртка).

---

[1] Цей вид роботи проводився здебільшого в один із наступних днів тижня в залежності від завантаження учнів уроками.

Вправи додому

1. Виходячи з рівності $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$,

одержуємо: $m^2 = 2C_m^2 + m$.

Покладаючи в цій формулі послідовно $m = 2, 3, \ldots m$, скласти ряд рівностей, додаючи які, одержимо формулу:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1) \cdot (2m+1)}{6}.$$

2. Довести методом математичної індукції, що сума кубів n перших чисел натурального ряду дорівнює $\left[\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right]^2$.

Розв'язування: 1) При $n = 1$ твердження справедливе.

2) Нехай $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \left[\frac{k \cdot (k+1)}{2}\right]^2$

Тоді

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4} + (k+1)^3 =$$

$$= \left[\frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}\right]^2$$

3. Що більше 100^{300} чи 300 !? (Відп. $300! > 100^{300}$).

Заняття 3

На це заняття запрошуються всі учні старших класів.

1. Член математичного гуртка робить доповідь «Леонард Ейлер — видатний математик».

2. Гуртківці пропонують всім присутнім розв'язати цікаві задачі і приклади.

а) Розглянемо тричлен $x^2 + x + 41$, вказаний академіком Л. Ейлером.

Підставимо в цей тричлен замість x нуль, одержимо просте число 41. Підставимо тепер в цей же тричлен замість x одиницю, одержимо знову просте число 43. Продовжуючи підставляти в тричлен замість x послідовно 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, одержуємо всякий раз просте число 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151. На підставі одержаних результатів твердимо, що при підстановці в тричлен замість x будь-якого цілого невід'ємного числа, завжди в результаті одержується

просте число. Чому міркування, наведені в цих прикладах не допустимі в математиці?

В чому порочність висновків, які нами зроблені?

(Як відомо тричлен $x^2 + x + 41$ дорівнює простому числу при $x = 0, 1, 2, \ldots, 39$, але при $x = 40$ цей тричлен дорівнює 41^2, тобто числу, яке не є простим).

б) Розв'язати приклад, взятий з «Алгебри» Л. Ейлера:

$$p^3 \cdot \frac{p^3 - 2q^3}{p^3 + q^3} + q^3 \cdot \frac{2p^3 - q^3}{p^3 + q^3} + q^3 = p^3.$$

в) Задача Ейлера. Визначити раціональні значення x і y, що задовольняють рівняння: $x^y = y^x$.

Розв'язування. Покладаючи $y = ax$, одержуємо рівняння $x^{ax} = (ax)^x$, звідки $x = a^{\frac{1}{a-1}}$ і $y = a^{\frac{a}{a-1}}$. Якщо $\frac{1}{a-1} = n$, то $x = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, $y = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$.

г) Як швидко підрахувати

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100}?$$

Відп. $\frac{99}{100}$

(Використайте рівність:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}\Big).$$

д) З допомогою п'яти двійок і знаків дій написати всі числа від 1 до 10 включно так, щоб у кожному числі фігурували всі двійки.

е) Математичний софізм. Всяке число у другому степені дорівнює 1.

Нехай $x = y = \frac{m^4}{4}$ (1)

Звідси $\sqrt{x} = \sqrt{y}$. (2)

Віднявши рівність (2) від рівності (1) по частинах, одержимо:

$$x - \sqrt{x} = y - \sqrt{y}$$

або

$$x - y = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Розкладаємо $x - y$ на множники:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Поділимо обидві частини останньої рівності на

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y});$$ одержимо:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

або

$$2\sqrt{x} = 1,$$ через те, що $x = \frac{m^4}{4}$, то $2 \cdot \sqrt{\frac{m^4}{4}} = 1$

або

$$m^2 = 1.$$

В якій ланці міркувань допущена помилка?

Заняття 4

1. Члени гуртка повідомляють про окремі прийоми розв'язування задач на знаходження найбільших і найменших значень (елементарними засобами).

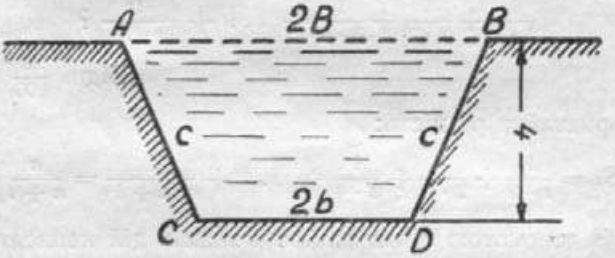

Рис. 3.

2. Розв'язуються задачі:

а) При побудові каналу, з метою зменшення його вартості, вигідно зменшити його поперечні розміри.

В більшості випадків форма живого перерізу каналу уявляє рівнобічну трапецію з даним кутом φ.

Частина перерізу, по якому вода при своєму переміщенні стикається з дном і стінками, називається змоченим периметром (підводним периметром).

Обчислити, при якому куті укосу φ, при заданій глибині каналу h і площі живого перерізу F, змочений периметр (U) має найменше значення і яке саме (рис. 3)?

Розв'язування. Маємо:

$U = AC + BD + CD = \frac{2h}{\sin\varphi} + 2в$. Далі: $F = (B + в) \cdot h$, звідки $B + b = \frac{F}{h}$. (1) Із трикутника DBO знаходимо: $DO = h \operatorname{ctg}\varphi$. Звідки слідує:

$$B - b = h \operatorname{ctg}\varphi. \qquad (2)$$

Із системи рівності (1) і (2) знаходимо:

$b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F}{h} - h \operatorname{ctg}\varphi\right)$. Тоді $U = \frac{F}{h} + \frac{2h}{\sin\varphi} - h \operatorname{ctg}\varphi =$

$$= \frac{F}{h} + \frac{h \cdot (2 - \cos\varphi)}{\sin\varphi}. \qquad (3)$$

Так як відношення $\frac{F}{h}$ стале (F і h задані), то найменше значення U має при найменшому значенні виразу $\frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi}$. Позначивши $\frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = x$, одержимо

$$(x^2 + 1) \cdot \cos^2\varphi - 4\cos\varphi - (x^2 - 4) = 0$$

Звідки

$$\cos\varphi = \frac{2 \mp \sqrt{4 + (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 4)}}{x^2 + 1} = \frac{2 \mp \sqrt{x^2 \cdot (x^2 - 3)}}{x^2 + 1} \qquad (4)$$

Щоб значення $\cos\varphi$ було дійсним, повинна мати місце нерівність: $x^2 - 3 \geqq 0$. Звідки $x \geqq 3$. Вираз $\frac{2 - \cos\varphi}{\sin\varphi}$ має найменше значення $x = \sqrt{3}$. Із (4) маємо:

$$\cos\varphi = \frac{2}{(\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{1}{2};$$

звідки $\varphi = 60°$. Найменше значення змоченого периметра виразиться з рівності (3);

$$U_{\min} = \frac{F}{h} + h\sqrt{3}.$$

б) Через вершину A трикутника ABC провести пряму XY так, щоб сума віддалей до неї від вершин B і C була найбільшою.

3. Математичний софізм. Вага слона дорівнює вазі комара (рис. 4).

Нехай x — вага слона, а

y — вага комара.

Позначимо їх суму через $2к$:

$$x + y = 2к$$

Рис. 4.

З цієї рівності можна одержати ще дві:

$$x - 2к = -y; \; x = -y + 2к.$$

Перемножимо почленно останні дві рівності:

$$x^2 - 2кx = y^2 - 2кy.$$

Додавши до обох частин цієї рівності по $к^2$, одержимо

$$x^2 - 2кx + к^2 = y^2 - 2кy + к^2$$

або

$$(x - к)^2 = (y - к)^2$$

Добуваючи з обох частин рівності квадратний корінь, одержимо

$$x - к = y - к, \text{ або } x = y$$

тобто вага слона (x) дорівнює вазі комара (y).

Де в перетвореннях допущена помилка?

4. Екскурсія на Байдаківський вуглерозріз.[1]

Вправи додому

а) При конструюванні трансформатора змінного струму, що має хрестоподібну форму, важливо, щоб залізне осердя найбільше заповняло внутрішній переріз циліндричної катушки. Які повинні бути розміри x і y осердя, якщо радіус катушки дорівнює a (рис. 5)?

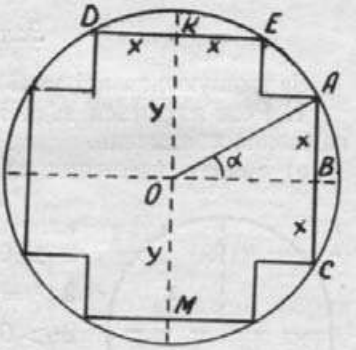

Рис. 5.

Розв'язування. Нехай $AB = BC = DK = KE = x$; $OB = OK = OM = y$,

$$\angle AOB = \alpha$$

Тоді площа S перерізу осердя виразиться:

$$S = 4 \cdot [xy + x \cdot (y - x)] = 4(2xy - x^2)$$

Але $x = a \cdot \sin \alpha$, $y = a \cdot \cos \alpha$, тому маємо

$$S = 4(2xy - x^2) = 2a^2 \cdot [(2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) - 1].$$

Шукаємо значення α, при якому вираз $z = 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = A\sin(2\alpha + \varphi)$ має найбільше значення.

$$z_{max} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5},$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0{,}4 \cdot \sqrt{5} \approx 0{,}8944;$$

звідки $\varphi \approx 26°34'$.

Із співвідношення $\sin(2\alpha + \varphi) = 1$ знаходимо:

$$2\alpha + 26°34' = 90°, \text{ звідки } \alpha \approx 31°43'.$$

Найбільше значення площі: $S = 2a^2 \cdot (\sqrt{5} - 1)$. Знаючи α, знаходимо розміри осердя x і y.

---

[1] Екскурсії організовуються в один із наступних днів тижня.

Примітка. Кут α можна було знаходити також безпосередньо з рівняння $2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \sqrt{5}$.

Звідки знаходимо:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \text{ і } \alpha \approx 31°43'.$$

б) Із прямокутних трикутників за даною висотою знайти трикутник, що має найменшу площу.

Заняття 5

Запрошуються всі учні старших класів.

1. Розв'язуються задачі на знаходження найбільших і найменших значень.

а) Знайти найменше значення функції $y = 2^x + 2^{-x}$.

Розв'язування. За відомими властивостями показникової функції $2^x > 0$ при будь-яких значеннях x. $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$ — число, обернене 2^x. Якщо $2^x > 0$ і $2^x \neq 1$, то легко довести, що $2^x + 2^{-x} > 2$. Якщо ж $2^x = 1$, то $2^{-x} = 1$ і сума їх дорівнює 2.

Отже, найменше значення функції

$$y = 2^x + 2^{-x} \text{ дорівнює } 2.$$

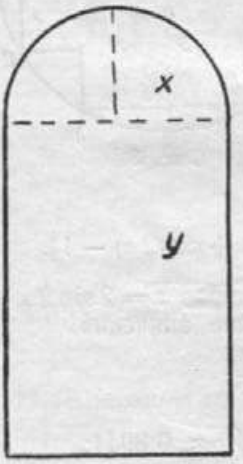

Рис. 6.

б) Із усіх прямокутників даної площі S знайти прямокутник найменшого периметра.

в) Вікно має форму прямокутника завершеного півкругом (рис. 6). Дано периметр фігури. Які повинні бути розміри її, щоб вікно пропускало найбільшу кількість світла?

Подаємо розв'язання (для вчителя).

Нехай радіус півкруга дорівнює x, а периметр — $2p$. Тоді, позначивши висоту прямокутної частини вікна через y, одержимо:

$$2p = 2x + 2y + \pi x$$

$$\text{і } y = p - x - \frac{\pi x}{2} \qquad (1)$$

Площа S вікна виразиться так:

$$S = 2xy + \frac{\pi x^2}{2} = 2x\left(p - x - \frac{\pi x}{2}\right) + \frac{\pi x^2}{2} = 2px - 2x^2 -$$

$$- \frac{\pi x^2}{2} \text{ або } S = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot x^2 + 2px \qquad (2)$$

Рівність (2) вказує на те, що S є квадратна функція від x і має максимум, бо коефіцієнт при x^2 має від'ємне значення. Визначаючи за формулою

$$x = -\frac{в}{2a}$$

те значення x, при якому S досягає максимуму, ми одержимо:

$$x = \frac{2p}{4 + \pi}$$

Але тоді $y = p - \frac{2p}{4+\pi} - \frac{\pi \cdot 2p}{2 \cdot (4+\pi)} = \frac{2p}{4+\pi}$, тобто $y = x$.

Таким чином, для того, щоб вікно вказаної форми пропускало найбільшу кількість світла при даному периметрі, необхідно щоб висота прямокутної частини вікна дорівнювала радіусу півкруга.

3. Практичні роботи в шкільній майстерні.

Вправи додому

а) Знаючи, що $x + y = 90°$, знайти найбільше значення суми $\sin x + \sin y$. Розв'язування. Так, як $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$, то найбільше значення дана сума має при умові $x - y = 0$.

Це значення є $\sqrt{2}$.

б) Довести, що з усіх прямокутників даного периметра найбільшу площу має квадрат.

Нехай периметр прямокутника $ABCD$ дорівняє $2P$. Якщо $AB = x$, то $AD = P - x$ (рис. 7) і площа $ABCD$, яку ми позначимо через y, виразиться так:

$$y = x(P - x)$$
$$\text{або } y = -x^2 + Px \quad (1)$$

Перед нами квадратна функція.

Вона має максимум, так як коефіцієнт $a<0$. Значення максимуму і значення аргумента, при якому він наступить, визначаються координатами вершин параболи, яка служить графіком функції (1) Згадаємо, що координати вершини А параболи такі:

$$A\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

Звідси: $x=-\frac{p}{2\cdot(-1)}=\frac{p}{2}$, тобто $AB=\frac{p}{2}$.

Тоді: $AD=p-x=p-\frac{p}{2}=\frac{p}{2}$, отже найбільша площа буде у квадрата.

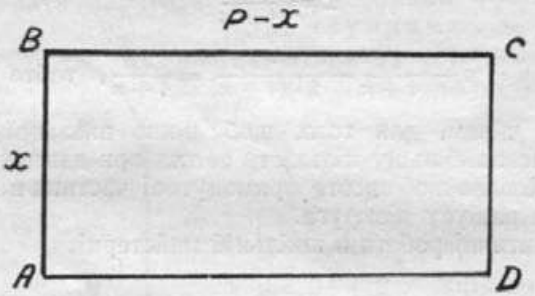

Рис. 7.

в) Які б не були числа a і b і яке б не було натуральне число n, має місце формула (біном Ньютона)

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1\cdot a^{n-1}\cdot b+\ \ldots\ +C_n^8a^{n-8}b^8+\ \ldots\ +$$
$$+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n \qquad (1)$$

Доведення. При $n=1$ маємо $a+b=a+b$, і таким чином, для цього випадку формула (1) справедлива. Нехай

$$(a+b)^k=a^k+C_k^1\cdot a^{k-1}\cdot b+C_k^2\cdot a^{k-2}\cdot b^2+\ \ldots\ +b^k.$$

Тоді $(a+b)^{k+1}=(a+b)^k\cdot(a+b)=(a^k+C_k^1\cdot a^{k-1}\cdot b+$
$+\ \ldots\ +b^k)\cdot(a+b)=a^{k+1}+(1+C_k^1)\cdot a^k\cdot b+(C_k^1+$
$+C_k^2)\ a^{k-1}\cdot b^2+\ldots+\ (C_{s_k}+C_k^{s+1})\cdot a^{k-s}\cdot b^{s+1}+\ \ldots+b^{k+1}.$

Приймаючи до уваги, що $C_k^s + C_k^{s+1} = C_{k+1}^{s+1}$, одержимо

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 \cdot a^k b + C_{k+1}^2 \cdot a^{k-1} b^2 + \ldots + C_{k+1}^{s+1} \cdot a^{k-s} \cdot b^{s+1} + \ldots + b^{k+1}.$$

г) Розрахувати, чому повинні дорівнювати радіус півкруга і висота прямокутної частини вікна, якщо периметр дорівнює 6 *м*, щоб вікно пропускало найбільшу кількість світла?

Наводимо приклади задач на знаходження найбільших і найменших значень, які вчитель може використати в гурткові роботі та на уроках математики.

1. З всіх трикутників даного периметра 2 p знайти трикутник найбільшої площі.

Розв'язок. Записавши формулу Герона для визначення площі трикутника $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ми бачимо, що множник p сталий, а останні три множники мають постійну суму

$$(p-a) + (p-b) + (p-c) = 3p - (a+b+c) = 3p - 2p = p.$$

Добуток цих множників буде максимальним у випадку їх рівності між собою $p - a = p - b = p - c$.

Остання рівність має місце для рівностороннього трикутника. Отже, при даному периметрі 2 p найбільшу площу матиме рівносторонній трикутник з стороною $\frac{2}{3}p$.

$$S = \frac{4p^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{p^2\sqrt{3}}{9}.$$

2. Знайти максимальне значення функції $y = -2x^3 + ax^2$.

Розв'язок. Запишемо дану функцію у вигляді добутку трьох множників $y = x^2(-2x + a) = x.x.(-2x + a)$. Помічаємо, що сума трьох множників є величина постійна.

$$x + x - 2x + a = a.$$

Отже, значення функції, добутку, буде максимальним у випадку

$$x = x = -2x + a = \frac{a}{3},$$

$$y = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^3}{27}.$$

З тригонометрії розглядаємо максимальні і мінімальні значення виразів, що містять у собі тригонометричні функції аргументів різного виду.

Приклади:

а) Знайти максимум $y = -\frac{3}{4}\sin(x - 45°)$, якщо x змінюється від 45° до 180°.

б) При якому значенні α вираз $\frac{1}{\cos\alpha}$ має мінімальне значення?

в) Знайти максимум і мінімум виразу $\frac{1}{3 - 2\sin\alpha}$.

г) Знайти найбільші значення функцій при x, розташованому на відрізку від 0 до 2π:

1) $\sin x + \cos x$, 2) $\sin x - \cos x$, 3) $\sin x \cdot \cos x$.

[Розв'язок 2) $y = \sin x - \cos x = \cos x(\operatorname{tg} x - 1) =$

$$= \frac{\cos x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$ де $\sqrt{2}$ є сталий множник, а $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ набирає максимального значення, що дорівнює одиниці, при $x = \frac{3}{4}\pi$. $y_{max} = \sqrt{2}$. 3) $y = \sin x \cdot \cos x$, $y = \frac{1}{2} \cdot 2\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, де $\frac{1}{2}$ є сталий множник, а $\sin 2x$ набирає максимального значення, що дорівнює 1, при $x = \frac{\pi}{4}$. $y_{max} = \frac{1}{2}$].

д) Знайти найменше значення функції $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, де $0° < x < 90°$.

Розв'язок.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sec^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}} =$$

$$= \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

Даний вираз набуває мінімального значення при максимальному значенні знаменника, який дорівнює 1 при $x = \frac{\pi}{4}$. Мінімальним значенням функції буде 2.

Цей приклад можна використати на уроках в 10 класі при доведенні нерівності $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geqslant 2$ при $\alpha>0$ і $\beta>0$.

Кожне число $\frac{\alpha}{\beta}$ може бути значенням тангенса якогось кута, а $\frac{\beta}{\alpha}$ котангенса того ж кута.

З другого боку, доведення нерівності $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geqslant 2$ застосовуємо до встановлення мінімального значення фукнції

$$y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$$

є) Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$y=\frac{x}{1+x^2}$$

Розв'язок. Вводимо підстановку $x=\operatorname{tg}\varphi$

$$y=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{2(1+\operatorname{tg}^2\varphi)}=\frac{\sin 2\varphi}{2}.$$

Максимальне значення функції буде дорівнювати $\frac{1}{2}$, при $\sin 2\varphi=1$, і мінімальне — $-\frac{1}{2}$, при $\sin 2\varphi=-1$. $\operatorname{Sin}2\varphi$ набирає значення рівного ± 1 при $\varphi=\pm\frac{\pi}{4}$. З нашої підстановки $x=\operatorname{tg}\varphi$ маємо, що при $\varphi=\pm\frac{\pi}{4}, x=\pm 1$.

Отже, функція набуває максимального значення, яке дорівнює $1/2$ при $x=1$, мінімального — $-1/2$ при $x=-1$.

3. Знайти найбільший об'єм паралелепіпеда при даній сумі ребер, що дорівнює 12а.

Розв'язок. Якщо ребра паралелепіпеда, що виходять з одної вершини, позначити через x, y, z, то сума всіх ребер $4x+4y+4z=12\cdot a$ і $x+y+z=3a$. Очевидно, що при даних ребрах паралелепіпед буде мати максимальний об'єм, якщо він буде прямокутним, бо сторони паралелограма, основи паралелепіпеда, при цьому утворюють прямокутник і бічне ребро буде висотою паралелепіпеда.

Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів, а сума цих вимірів за умовою нашої задачі стала і дорівнює $3a$.

Добуток буде найбільшим при умові рівності множників між собою. Отже, об'єм паралелепіпеда, сума ребер якого дорівнює 12a, буде найбільшим, коли паралелепіпед буде прямокутним і всі ребра його будуть дорівнювати a. Це буде куб з ребром a. Об'єм куба — a^3.

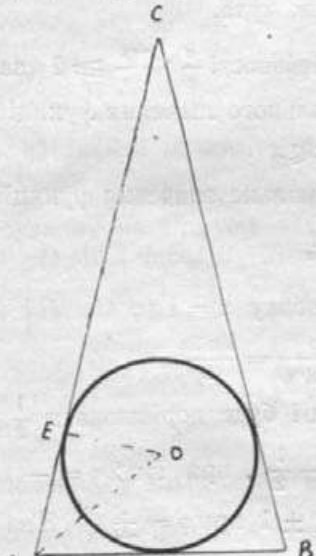

Рис. 8.

4. Знайти прямий конус найменшого об'єму, який описаний навколо кулі радіуса r. (рис. 8).

Р о з в'я з о к. Форма конуса, описаного навколо кулі радіуса r, буде визначатися кутом нахилу твірної конуса до площини основи.

Позначимо кут CAB через 2α. Визначимо через r і α об'єм описаного конуса.

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot AD^2 \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{3}\pi (r \operatorname{ctg} \alpha)^2 \cdot r \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^3 \alpha} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}.$$

Значення V, як бачимо, залежить лише від значення α, бо π і r є сталі величини.

V буде мінімальним, якщо $\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)$ буде максимальним. Підмічаємо, що сума двох множників $\operatorname{tg}^2 \alpha$ і $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$ є величина стала: $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1$.

Максимальний добуток будемо мати при $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$, звідки

$$2 \operatorname{tg}^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Радіус основи конуса дорівнює $r \operatorname{ctg} \alpha = r\sqrt{2}$. Висота конуса дорівнює $r\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = r\sqrt{2} \cdot \dfrac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = r\sqrt{2}$.

$\times \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2r}{\frac{1}{2}} = 4r$. Шуканим буде конус, у якого радіус основи дорівнюватиме $r\sqrt{2}$, а висота $4r$. Об'єм шуканого конуса дорівнює $\frac{8}{3}\pi r^3$.

5. Знайти висоту прямого циліндра з найбільшою бічною поверхнею, вписаного в кулю радіуса r. (рис. 9).

Розв'язок. Бічна поверхня циліндра буде дорівнювати $2\pi xy$, де x — висота; y — радіус основи циліндра.

$$S = 2\pi\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} \cdot x.$$

Позначимо $r^2 - \frac{x^2}{4} = z^2$; $4z^2 = 4r^2 - x^2$; $4z^2 + x^2 = 4r^2$, або $z^2 + \frac{x^2}{4} = r^2$. Добуток $\frac{z^2 \cdot x^2}{4}$ буде найбільшим при $z^2 = \frac{x^2}{4}$, бо сума множників z^2 і $\frac{x^2}{4}$ стала і дорівнює r^2. Коли добуток $\frac{z^2 \cdot x^2}{4}$ буде найбільшим, то і zx теж буде найбільшим, тоді буде найбільшим і $2\pi zx$ (S). Отже $z^2 = \frac{x^2}{4} = \frac{r^2}{2}$, $x = r\sqrt{2}$. Найбільшу бічну поверхню матиме рівносторонній вписаний циліндр.

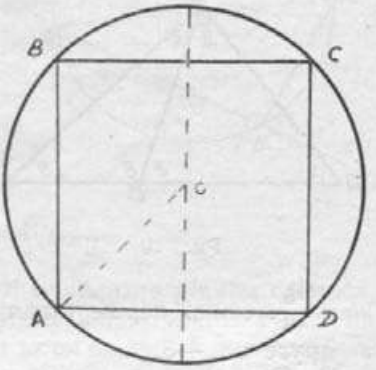

Рис. 9.

Заняття 6.

Запрошуються всі учні старших класів.

1. Член гуртка робить доповідь «М. І. Лобачевський — великий російський математик». З цієї доповіді учні дізнаються про розвиток геометрії, про «Начала Евкліда», про п'ятий постулат і невдалі спроби його довести, про основну ідею геометрії Лобачевського.

2. Гуртківці пропонують присутнім розв'язати задачі:

а) Розв'язати рівняння з «Алгебри» М. І. Лобачевського.

$$\left(2x+\frac{1}{3}\right)\cdot 5+7=3x-2\cdot\left(\frac{1}{2}x-9\right)-4;$$

$$10x+\frac{5}{3}+7=3x-x+18-4;\ 8x=5\frac{1}{3};\ x=\frac{2}{3}$$

Пропонують розв'язати систему лінійних рівнянь з книги М. І. Лобачевського:

$$5x-9y=37,$$
$$4x-15y=37$$

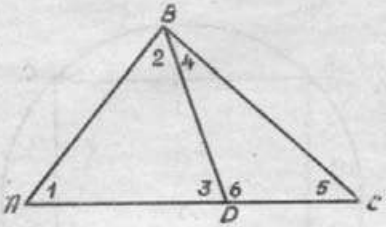

Рис. 10.

При знаходженні числових множників для зрівняння коефіцієнтів пропонується учням використати вказівку автора: для того, щоб зрівняти коефіцієнти при y, треба взяти дріб $\frac{15}{9}$ і скоротити його, одержимо $\frac{5}{3}$, отже, перше рівняння треба помножити на 5, а друге на —3.

3. Доводиться теорема про суму кутів трикутника, не спираючись на теорію паралельності прямих.

Нехай ABC — довільний трикутник. Провівши відрізок BD, одержимо два трикутника: $\triangle ABD$ і $\triangle DBC$, кути яких пронумеруємо, як це позначено на рис. 10. Позначивши суму кутів трикутника літерою x, будемо мати: $\angle 1+\angle 2+\angle 3=x$ і $\angle 4+\angle 5+\angle 6=x$. Додавши почленно ці дві рівності, одержимо:

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=2x. \quad (1)$$

Але $\angle 3+\angle 6=2d$, а $\angle 1+(\angle 2+\angle 4)+\angle 5=x$ (як сума кутів $\triangle ABC$). На підставі (1) маємо: $x+2d=2x$, звідки $x=2d$, що і т. д.

Чи всі погоджуються з доведенням?

4. Математичний софізм.

Всяке коло має два центри.

Візьмемо довільний кут ABC і в довільно взятих на сторонах цього кута точках D і E побудуємо перпендикуляри до відповідних сторін. Нехай M — точка перетину цих перпендикулярів (рис. 11).

Проведемо коло через три точки D, M і E. Нехай воно перетинає сторони даного кута в точках K і L.

Сполучимо точки K і L з точкою M. Кут KDM — прямий за побудовою, отже, він, як вписаний кут, спирається на діаметр KM. Кут LEM — також прямий і вписаний. Таким чином, він також спирається на діаметр LM. Отже, KM і LM діаметри одного кола.

Середина кожного з них є центр цього кола. Коло має два центри.

5. Підсумки проведеної екскурсії на Байдаківський вуглерозріз.

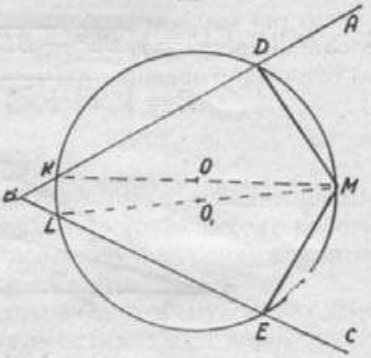

Рис. 11.

Вправи додому

1. Прийнявши радіус землі приблизно рівним 6400 *км*, виконати вправи: а) Як далеко видно, якщо стоїш на березі моря на висоті 5 *м* над його рівнем?

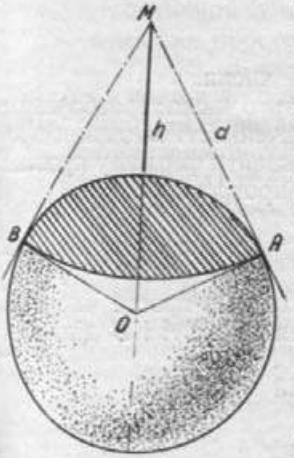

Рис. 12.

б) Яка далекість горизонту, якщо проживаєш на березі моря на висоті 100 *м*?

в) Яка далекість горизонту з вершини Ельбруса (висота Ельбруса ≈ 5 *км*)?

Чи видно з вершини Ельбруса Армавір, Батумі, Тбілісі? (Скористуйтесь картою).

г) Над Москвою піднявся стратостат на висоту 20 *км* (рис. 12). Яка далекість горизонту його? Які області буде видно з цього стратостата? Чи видні будуть міста Курськ, Горький, Смоленськ?

2. Дано дві сили: $F_1 = 8$ *кг* і $F_2 = 6$ *кг*.

Визначити рівнодійну цих сил, якщо кути між ними відповідно дорівнюють 30°, 60°, 90°, 120°, 150°.

Розв'яжемо задачу для кута в 30° між даними силами (рис. 13).

$$З\ \triangle OBC:\ R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot DC}.$$

$$З\ \triangle BCD:\ CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{F_2^2 - \left(\frac{F_2}{2}\right)^2} = \frac{F_2}{2}\sqrt{3},$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_1 \cdot F_2 \cdot \sqrt{3}}.$$

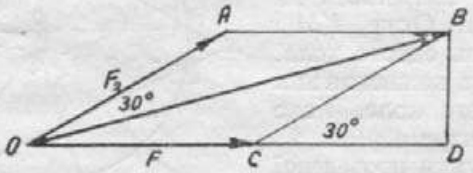

Рис. 13.

Підставивши числові дані, одержимо:

$$R = \sqrt{64 + 36 + 48 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{100 + 48 \cdot 1{,}73} =$$
$$= \sqrt{183{,}04} = 13{,}5\ (кг).$$

Заняття 7

1. Доповідь вчителя про прості числа.

Зміст доповіді: визначення простого числа; ератосфенове решето; евклідове доведення нескінченності множини простих чисел; намагання математиків знайти формулу простих чисел; прості числа в арифметичних прогресіях.

2. Розв'язування задач.

а) Довести, що число простих чисел в арифметичній прогресії $4n + 3$ нескінченне.

б) Дано, що ні A, ні B не діляться на просте число P. Довести, що або сума, або різниця чисел A і B ділиться на P^n, якщо $A^2 - B^2$ ділиться на P^n.

3. Практичні роботи в шкільній майстерні.

Вправи додому

1. Три прості числа a, b і c, більші за число 3, утворюють арифметичну прогресію:

$$a = a;\ b = a + d;\ c = a + 2d;$$

Довести, що d ділиться на 6.

2. Знайти всі прості числа P такі, що $P + 10$ і $P + 14$ також є простими числами.

3. Обчислити costg1.

4. З пластинки, що має форму правильного шестикутника з стороною «а», вирізали круглу шайбу найбільшого радіуса. Скільки процентів матеріалу зрізано? (Обчислити з точністю до 0,1%).

Заняття 8

1. Повідомлення гуртківців про прості числа: розміщення простих чисел в натуральному ряді чисел: роботи Ейлера, Лежандра, Діріхле, постулат Бертрана; асимптотичний закон Чебишева; число Ск'юза.

2. Один із членів гуртка доводить теорему. Якщо дане число не ділиться на жодне із простих чисел включно до деякого простого числа, квадрат якого більше даного числа, то воно є просте число.

3. Самостійна робота.

Довести, що всяке просте число, більше 3, виражається формулою: $6n \pm 1$, тобто при діленні на 6 просте число дає в остачі 1, або 5.

4. Математичний фокус.

x — будь-яке просте число, більше, ніж 3.

$(x^2 + 17) : 12$. В остачі одержиться 6.

Пояснення. Будь-яке просте число, більше трьох, можна записати у вигляді $6n \pm 1$, де n — ціле число.

5. Математичний софізм. $1 = 0$!

Пояснення. Розглянемо систему рівнянь.

$x^3 - y^3 = 3xy\ (x - y)$ (1)

$x - y = 1$ (2)

Рівняння (1) можна переписати так:

$(x - y)^3 = 0$. Через те, що $x - y = 1$, то одержуємо: $1^3 = 0$. Отже $1 = 0$!

6. Практичні роботи в шкільній майстерні.

Вправи додому

1. Довести, що коли p і $2p + 1$ числа прості і $p \geqslant 5$, то $4p + 1$ — число складове.

Розв'язування:

$$\frac{(2p + 2) \cdot (2p + 1) \cdot 2p}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2p\,(2p + 1) \cdot (p + 1)}{3}, \qquad (1)$$

представляючи число комбінацій з $2p+2$ елементів по три, дорівнює цілому числу. Оскільки за умовою числа p і $2p+1$ прості ($p \geqslant 5$) і оскільки 2 взаємно просте з 3, то $p+1$ кратне 3, а тому $4p+1 = 4 \cdot (p+1) - 3$ теж кратне 3. Крім того, оскільки $p \geqslant 5$, то $4p+1 \geqslant 21$. Отже число $4p+1$ є складове.

2. Задача-жарт.

Я задумав тризначне число. Якщо від нього відняти 7, то воно поділиться на 7, якщо відняти від нього 8, то воно поділиться на 8, якщо ж від нього відняти 9, то воно розділиться на 9. Що це за число?

Заняття 9

1. Доповідь члена гуртка про множення й ділення комплексних чисел, виражених в тригонометричній формі, піднесення до степеня, формула Муавра.

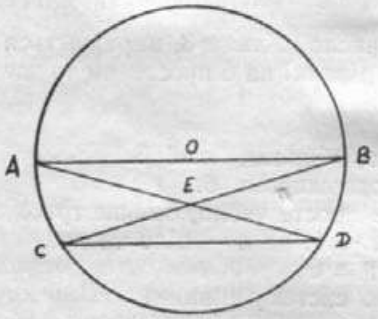

Рис. 14.

2. Самостійна робота гуртківців.

а) На підставі повідомленого матеріалу вивід формул тригонометрії:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha;$$
$$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha;$$

в) Вивід формули:

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cdot \cos^{n-2} \alpha \times \sin^2 \alpha + C_n^4 \cdot \cos^{n-4} \alpha \times \sin^4 \alpha - \ldots;$$

3. Визначити n з умови: $(1+i)^n = (1-i)^n$.

4. Математичний софізм.

Доведемо, що хорда, яка не проходить через центр кола, дорівнює діаметру цього кола.

Проведемо в колі (рис. 14) діаметр AB і довільну хорду BC. Через кінець діаметра A і точку E — середину хорди BC — проведемо хорду AD.

Після цього проведемо хорду CD. Розглянемо трикутники CED і ABE. Маємо: $CE = BE$ за побудовою, $\angle CED = \angle AEB$, як вертикальні і $\angle C = \angle A$, як вписані кути, які спираються на одну й ту ж дугу BD. Отже, $\triangle CED = \triangle ABE$, звідки $CD = AB$. Де помилка?

5. Як розташуються на площині точки, що відповідають комплексним числам виду $a - ai$?

6. Практичні роботи в шкільній майстерні.

Завдання додому

Знайти помилку в кожному із слідуючих міркувань:

1) $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$, $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$, $\frac{1}{i} = \frac{i}{1}$, $i^2 = 1$;

2) $i^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = \pm 1$;

3) $3 = \sqrt{9} = \sqrt{(-9) \cdot (-1)} = \sqrt{-9} \cdot \sqrt{-1} = 3i \cdot i = -3$;

4) взяти коло радіуса 1 (рис. 15).

Точка O — початок відліку. Додатніми вважаються напрямки вправо і вгору. Трикутник AA_1B — прямокутний, тому на підставі теореми про перпендикуляр, опущений із вершини прямого кута на гіпотенузу, одержимо:

$$OB^2 = AO \cdot A_1O = (1) \cdot \times (-1) = -1,$$

$$OB = \sqrt{-1} = i;$$

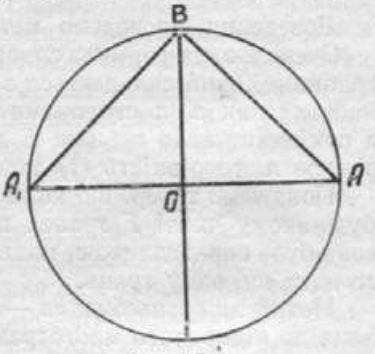

Рис. 15.

5) $OA^2 + OB^2 = AB^2$, $1^2 + i^2 = AB^2$, $1 - 1 = AB^2$; $AB = 0$.

(Відп. 1) $\sqrt{1} = \pm 1$; $\sqrt{-1} = \pm i$; $\frac{1}{i} = \frac{i}{-1}$ дає правильну відповідь $-1 = i^2$; 3) $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-1} = (\pm 3i) \cdot (\pm i) = \pm 3$; 5) $OB \neq i$; $OB = 1$; OB — довжина відрізка).

2. Вивести формули: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$; $\sin n\alpha = C_n^1 \cos^{n-1}\alpha \cdot \sin\alpha - C_n^3 \cos^{n-3}\alpha \cdot \sin^3\alpha + C_n^5 \cos^{n-5}\alpha \cdot \sin^5\alpha - \ldots$;

3. Обчислити суму: $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha$.

4. Дано число $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Яке число відповідає точці, симетричній даній відносно: а) дійсної осі; б) уяв-

ної осі; в) початку координат? (Відп. а) $\rho[\cos(2\pi - \varphi) + i\sin(2\pi - \varphi)]$; б) $\rho[\cos(\pi - \varphi) + i\sin(\pi - \varphi)]$; в) $\rho[\cos(\pi + \varphi) + i\sin(\pi + \varphi)]$.

5. Чи існують два таких уявних числа, сума яких, добуток і частка від ділення одного на друге виявляються дійсними числами?

Заняття 10

1. Один із членів гуртка доводить теорему Ейлера про співвідношення між числом ребер, граней і вершин опуклого многогранника.

Доведення. Виймемо з даного многогранника кілька суміжних між собою граней і назвемо фігуру, що залишилась, відкритим многогранником. Доведемо, що для кожного відкритого многогранника матиме місце формула:

$$K + 1 = E + F \qquad (1)$$

Доведення проведемо методом математичної індукції.

Очевидно, ця формула справедлива для відкритого многогранника, який складається з однієї грані, що являє собою многокутник з n сторонами. У цьому випадку $F = 1$, а оскільки число вершин E дорівнює числу ребер К і дорівнює n, то рівність (1) задовольняється.

Покажемо тепер, що коли формула (1) справедлива при будь-якому числі F граней відкритого многогранника, то вона буде справедливою, коли до цього многогранника приставити ще одну грань.

Нехай ця грань буде m — кутник і нехай вона приставлена до відкритого многогранника так, що p її сторін збігається із сторонами інших граней, а $m - p$ сторін залишається вільними. Тоді зрозуміло, що $p + 1$ вершин останньої грані збігатиметься з вершинами попередніх граней.

Позначимо число граней, ребер і вершин нового відкритого многогранника відповідно через F^1, K^1 і E^1. Тоді $F^1 = F + 1$, бо в новому многограннику граней на одну більше. Крім того, матимемо:

$$K' = K + m - p \text{ і } E' = E + m - (p + 1).$$

Легко показати, що коли справедлива рівність (1), то числа E', F', K' також задовольняють цю рівність. Справді, коли підставити F', K', E', замість F, K, E,

у формулу (1), то матимемо $K+m-p+1=E+m-$ $-p-1+F+1$, звідки $K+1=F+E$, а остання рівність справедлива за припущенням.

Щоб перейти до теореми Ейлера, припустимо, що у відкритому многограннику є тільки один отвір, який утворився внаслідок вилучення однієї грані. Вилучення однієї грані не зменшує ні числа ребер, ні числа вершин многогранника і тільки граней стає на одну менше.

Підставляючи у формулу (1), замість F, число $F-1$, дістанемо формулу Ейлера:

$$K+1=F-1+E;$$
$$K+2=F+E, \text{ або } E-K+F=2.$$

2. Перевірка теореми Ейлера на відомих учням многогранниках: призмах, пірамідах.

3. Побудова правильних многогранників (куба, тетраедра, додекаедра).

Вчитель вказує, що теорема Ейлера встановлює існування не більше п'яти видів правильних многогранників, але з цієї теореми ще не випливає, що всі п'ять видів правильних многогранників дійсно існують, що можна здійснити їх побудову. Щоб довести існування всіх п'яти видів правильних многогранників, розглянемо способи їх побудови.

Завдання додому:

1) Побудувати ікосаедр.

2) Довести, що не існує многогранника, що має 7 ребер.

Доведення. Насамперед переконуємося, що якщо хоч би одна грань многогранника не є трикутник, то число всіх ребер більше 7. Якщо ж многогранник має K граней, що являються трикутниками, то число всіх ребер дорівнює $\frac{3K}{2}$, тому K парне, тобто має вид $K=2n$ і число ребер дорівнює $3n \neq 7$. Отже, не існує многогранника, що має 7 ребер.

Заняття 11

1. Член гуртка доводить теорему:

Середнє геометричне декількох додатніх чисел не більше середнього арифметичного цих же чисел, тобто якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ додатні, то

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \qquad (1)$$

Розв'язування: 1) При $n = 2$ нерівність (1) матиме вигляд:

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leqslant \frac{a_1 + a_2}{2}. \qquad (2)$$

При будь-яких додатних a_1 і a_2 справедлива нерівність $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geqslant 0$.

З цієї нерівності легко одержати і нерівність (2). Нерівність (2) має простий геометричний зміст. На прямій AB відкладаємо послідовно відрізки a_1 і a_2. На сумі їх, як на діаметрі, опишемо коло. Тоді

$\frac{a_1 + a_2}{2}$ — радіус цього кола, а $\sqrt{a_1 \cdot a_2}$ — половина хорди, перпендикулярної до діаметра в спільній точці a_1 і a_2.

2) Припустимо, що нерівність (1) справедлива при $n = k$.

Доведемо, що тоді вона справедлива і при $n = 2k$. Дійсно.

$$\sqrt[2k]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_{2k}} = \sqrt{\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} \ldots a_{2k}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \ldots a_{2k}}}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + \ldots + a_{2k}}{k}}{2} =$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots + a_{2k}}{2k}.$$

Нерівність (1) перевірена при $n = 2$, і, таким чином, можемо твердити, що вона справедлива при $n = 4, 8, 16$ і т. д., тобто взагалі при $n = 2^s$, де s — натуральне число.

3) Для того, щоб довести справедливість нерівності (1) при будь-якому натуральному n, покажемо, що із справедливості нерівності при $n = k$ слідує її справедливість при $n = k - 1$.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ — деякі додатні числа, а λ — деяке покищо неозначене, додатне число. Тоді

$$\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_{k-1}\lambda} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + \lambda}{k}.$$

Виберемо λ так, щоб

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + \lambda}{k} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1},$$

тобто покладемо $\lambda = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}$.

Маємо $\sqrt[k]{\frac{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})}{k-1}} \leqslant$

$$\leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}, \text{ або } \sqrt[k-1]{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1}}{k-1}.$$

Нехай тепер m — довільне натуральне число. Якщо $m = 2^s$, то, згідно 2), для нього нерівність справедлива. Якщо ж $m \neq 2^s$, то знайдемо таке s, щоб m було менше 2^s, і тоді на підставі 2) і 3) твердимо, що нерівність вірна для $n = m$.

4. Розв'язуються задачі:

а) Довести нерівність:

$$[n(n+1)]^n > (2n)!$$

Доведення.

$$\frac{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)}{n} > \sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} \text{ і}$$

$$\frac{2 + 4 + 6 + \ldots + 2n}{n} > \sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}, \text{ або}$$

$$n > \sqrt[n]{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} \text{ і } n + 1 > \sqrt[n]{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}.$$

Виконавши множення нерівностей, одержимо:

$$n \cdot (n+1) > \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots 2n}, \text{ або } [n \cdot (n+1)]^n > (2n)!$$

б) З усіх паралелепіпедів з даною сумою трьох взаємноперпендикулярних ребер знайти той, об'єм якого найбільший.

5. Екскурсії на Семенівський вуглерозріз та на завод «Червоний ливарник».

Завдання додому

1. Довести, що, якщо a, b, c, d різні додатні числа, то $\sqrt[4]{abcd} < \frac{a+b+c+d}{4}$. Так як a, b, c, d — різні числа то $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ і $\sqrt{dc} < \frac{c+d}{2}$. Нерівності з додатніми членами допускають почленне множення нерівностей. Отже, $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd} < \frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}$. Всі числа тут додатні. Смисл

знака нерівності не зміниться, якщо взяти арифметичне значення квадратичного кореня із лівої і правої частин нерівності. Будем мати:

$$\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} < \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}};$$

$$\text{але } \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \leqslant \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}.$$

Отже $\sqrt[4]{abcd} < \frac{a+b+c+d}{4}$.

2. Довести, що при будь-якому цілому $n > 1$ має місце нерівність:

$$1 + n\cdot 2^{\frac{n-1}{n}} < 2^n.$$

3. Знайти діаметр круга, в сегмент якого, відповідний хорді довжиною в $\sqrt{21}$ *см*, вписано квадрат з стороною 1,4 *см*.

Заняття 12

1. Практичні роботи в шкільній майстерні.
2. Розглядається математичний софізм:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8};\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3;$$

$$2\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) > 3\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right);\ 2 > 3.$$

3. Не користуючись таблицями і не виконуючи обчислення, довести нерівність: $\sin 36^\circ\cdot\sin 54^\circ < \frac{5\sqrt{5}-1}{4\pi}$

4. Обчислити усно, чому дорівнює добуток логарифмів усіх послідовних чисел від 1 до 300.
5. Що більше 1000^{1000} чи 1001^{999}? (Відп. $1000^{1000} > 1001^{999}$)

Заняття 13

1. Будова геодезичних приладів та користування ними.
2. Вимірювання на місцевості.

Завдання додому

Задача 1. В центрі квадратної ділянки землі з стороною 12 *м* треба вирити котлован циліндричної форми з радіусом в 4 *м*. Вириту землю треба розкидати рівно на решті поверхні ділянки.

Визначити з точністю до 1 *см*, до якої глибини треба рити, щоб котлован одержався глибиною 1,25 *м*.

Розв'язування. Якщо позначити через x (в метрах) глибину CD, на яку треба рити, то об'єм виритої землі буде дорівнювати:

$$\pi \cdot 4^2 \cdot x = 16\pi x$$

Площа, на якій буде розкидана вся ця земля, дорівнює площі ділянки без площі основи котлована (рис. 16), тобто

$$144 - \pi \cdot 4^2 = 144 - 16\pi$$

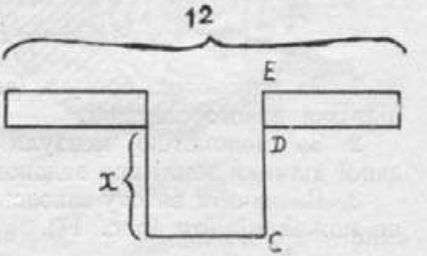

Рис. 16.

Тоді товщина DE нового шару землі буде дорівнювати:

$$\frac{16\pi x}{144 - 16\pi} = \frac{\pi x}{9 - \pi}$$

Загальна ж глибина котлована CE за умовою повинна дорівнювати 1,25 *м*. Отже, маємо:

$$x + \frac{\pi x}{9 - \pi} = 1{,}25.$$

Звідси: $x = \frac{5}{4} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{9}\right)$. Безпосереднім обчисленням знаходимо:

$$\frac{\pi}{9} = 0{,}349; \quad 1 - \frac{\pi}{9} = 0{,}651; \quad \frac{5}{4} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{9}\right) = 0{,}814$$

З точністю до 1 *см* $x = 0{,}81$ *м*.

Задача 2. Яка кількість силосу (в тоннах) вміститься в силосній башті циліндричної форми, якщо діаметр поперечного перерізу в середині башти дорівнює 3,7 *м* і висота в середині башти 7,5 *м*? Середня вага 1 $м^3$ силосу 670 *кг*.

Практичні роботи.

Учні розв'язують техніко-розрахункові задачі, складені на матеріалах екскурсій, виробничої практики на місцевих підприємствах та в колгоспах, виконують обчислення, користуючись:

а) логарифмічною лінійкою;
б) конторською рахівницею;
в) арифмометром (декілька занять).

Завдання додому

1. За допомогою ноніуса (верн'єра) виміряти довжину відрізка даного стержня.

2. За допомогою мензули виконати зйомку плану даної ділянки землі при заданому масштабі.

3. Визначити висоту заводської труби, до основи якої не можна підійти (рис. 17).

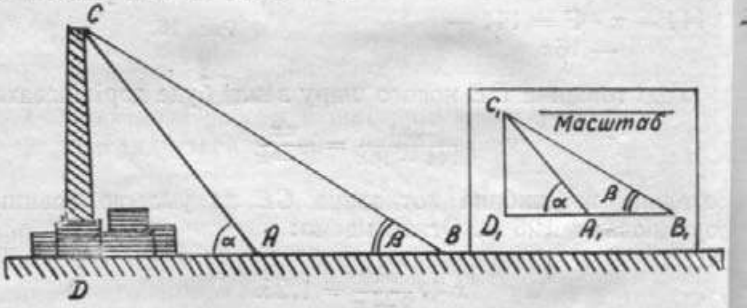

Рис. 17

Розв'язування: а) Вимірюються: базис AB і кути α і β;

б) З $\triangle BCD$, $CD = BD \cdot \operatorname{tg}\beta$;

в) З $\triangle ACD$, $DA = CD \operatorname{ctg}\alpha$;

г) $BD = AB + CD \operatorname{ctg}\alpha$;

д) $DC = (AB + CD \operatorname{ctg}\alpha) \operatorname{tg}\beta$;

$$DC \operatorname{ctg}\beta = AB + CD \operatorname{ctg}\alpha.$$

Звідси: $DC = \dfrac{AB}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$.

4. Біля морського берега є небезпечна для кораблів зона підводних скель. Де потрібно встановити на березі два маяки і як використати їх, щоб забезпечити безпечне плавання кораблів біля цієї зони?

Рисунок 18 допоможе вам зробити цю задачу. M_1 і M_2 — маяки. K_1, K_2 і K_3 — різні положення корабля відносно небезпечної зони. Зверніть увагу на кут $M_1K_1M_2$, а цей кут відомий капітану корабля.

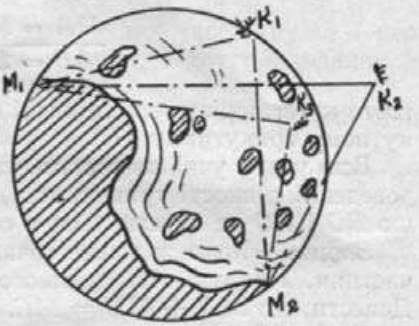

Рис. 18.

Заняття 15.

Запрошуються учні всіх старших класів.

1. Доповідь члена гуртка: «С. В. Ковалевська — видатний російський математик».

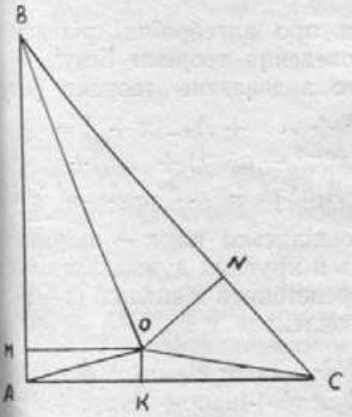

Рис. 19.

2. Розв'язування задач:

а) Розглядається математичний софізм:

«Катет дорівнює гіпотенузі в одному і тому ж прямокутному трикутнику».

Візьмемо прямокутний трикутник ABC (рис. 19).

Проведемо бісектрису кута B, а до AC проведемо перпендикуляр через її середину. Точку перетину їх позначимо O. Сполучимо цю точку з A і C і опустимо перпендикуляри на AB і BC.

Розглянемо одержані трикутники:

1. $\triangle AOK = \triangle KOC$ ($OK \perp AC$; $AK = KC$; OK — спільна), отже, $AO = OC$ і $\angle AOK = \angle KOC$;

2. $\triangle BMO = \triangle BNO$ (трикутники прямокутні, BO — спільна, $\angle OBM = \angle OBN$), отже, $BM = BN$ і $\angle BOM = \angle BON$. З рівності двох пар кутів виходить, що $\angle AOM =$

$= \angle CON$. Крім того, доведено, що $AO = OC$ і $MO = ON$. Отже, $\triangle AOM = \triangle CON$. Таким чином, $AM = NC$.

Звідси маємо:

$$\begin{array}{l} BM = NB \\ \underline{MA = NC} \\ AB = BC, \end{array}$$

тобто катет дорівнює гіпотенузі в одному і тому ж прямокутному трикутнику (?!).

Всю увагу учні звертають на відшукання помилки при доведенні рівності трикутників, випускаючи з поля зору, що BO і KO не перетнуться в середині трикутника.

Задача. «Коло поділене точками A, B і C на три рівні частини. На дузі AB (меншого півкола) взята точка M. Довести, що $MA + MB = MC$.

Чи можна, маючи лише дві посудини місткістю 3 і 5 *л*, налити із водопровідного крана 4 *л* води?

3) Практичні роботи в шкільній майстерні.

Заняття 16.

1. Доповідь члена гуртка про алгебраїчні рівняння.
2. Розглядаються різні доведення теореми Безу[1].

Наведемо приклад одного з доведень теореми Безу:

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A =$$
$$= [A_0(x^n - a^n) + A_1(x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots +$$
$$+ A_{n-1} \cdot (x - a)] + A_0a^n + A_1a^{n-1} + \ldots + A_{n-1}a + A.$$

Вираз в квадратних дужках ділиться на $x - a$ (різниці однакових степенів, що стоять в круглих дужках, діляться на $x - a$), тому його можна представити в вигляді $(x - a) \times Q(x)$, де $Q(x)$ деякий многочлен:

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A =$$
$$= (x - a)\,Q(x) + [A_0a^n + A_1a^{n-1} + \ldots + A_{n-1}a + A].$$

Так як степень виразу в квадратних дужках нижче першого, тобто нижче степеня $x - a$, то він і є остачею від ділення даного многочлена на $x - a$.

3. Розв'язування задач.

---

[1] Математика в школі № 3, 1956, О. О. Лавров «Про різні доведення теореми Безу».

а) Довести, що цілі корені алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами є дільниками вільного члена.

Доведення. Нехай α — цілий корінь рівняння $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, де $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — цілі числа. Сума двох цілих чисел (нуль) і перший доданок ділиться на α, отже, і другий доданок a_0 ділиться на α.

б) Вказати необхідну й достатню умову, щоб один з коренів многочлена дорівнював нулеві.

Щоб один з коренів многочлена $f(x)$ дорівнював нулеві, необхідно й достатньо, щоб вільний член многочлена дорівнював нулеві. Дійсно, якщо в многочлені $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ вільний член $a_0 = 0$, то при $x = 0$ многочлен $f(x) = 0$: достатність умови встановлена. Якщо ж вільний член $a_0 \neq 0$, то при $x = 0$ многочлен $f(x) = a_0 \neq 0$: встановлена необхідність умови.

в) Встановити умову подільності многочлена $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$ на многочлен $x^p + x^{p-1} + \ldots + x + 1$.

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \text{ і } x^p + \ldots + x + 1 = \frac{x^{p+1} - 1}{x - 1}.$$

Поділивши першу дріб на другу, одержимо частку $\frac{x^{n+1} - 1}{x^{p+1} - 1}$. Різниця однакових степенів двох чисел ділиться на різницю основ. Тому представивши $x^{n+1} - 1$ в формі $(x^{p+1})^{\frac{n+1}{p+1}} - 1$, встановимо, що умова подільності буде виконана, якщо $n + 1$ ділиться на $p + 1$.

г) Розв'язати рівняння: $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0$, знаючи, що один корінь дорівнює i.

д) Знайти корені рівняння $(x + 2) \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 + 1) \times (x^2 - 2) = 0$: 1) в множині натуральних чисел; 2) в множині цілих чисел; 3) в множині раціональних чисел; 4) в множині дійсних чисел; 5) в множині комплексних чисел.

(Відп. 1) Не має; 2) -2; 3) $-2, \frac{1}{2}$; 4) $-2, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$; 5) $-2, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, i, -i$).

Вправи додому

1. Показати, що: а) $100x^{100} - 30x^{30} + 10x^{10} - x - 79$ ділиться на $x - 1$; б) $(x+2)^3 - 3(x+3)^2 - 17$ ділиться на $x - 3$.

2. Довести, що $x^{991} + x^{334} + 1$ ділиться на $x^2 + x + 1$.

3. Довести, що при натуральних значеннях n сума $(x+y)^{4n+2} + (x-y)^{4n+2}$ ділиться на $x^2 + y^2$.

Доведення. $(x+y)^{4n+2} + (x-y)^{4n+2} = [(x+y)^2]^{2n+1} + [(x-y)^2]^{2n+1}$. Але сума непарних степенів двох чисел ділиться на суму основ. Тому $[(x+y)^2]^{2n+1} + [(x-y)^2]^{2n+1} = [(x+y)^2 + (x-y)^2] \cdot Q(x)$, де $Q(x)$ — частка. Але $(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2 \cdot (x^2 + y^2)$, звідки видно, що даний многочлен, що дорівнює $2(x^2 + y^2) \cdot Q(x)$, ділиться на $x^2 + y^2$.

4. Питання: «Нехай частка від ділення многочлена $P(x)$ на $x - a$ є $Q(x)$, а остача R. Тоді $P(x) = (x - a) Q(x) + R$ (1). Покладаючи $x = a$, одержимо $P(a) = R$; чому можна в рівності (1) покладати $x = a$, адже при цьому дільник $x - a$ дорівнює нулеві, а ділення на нуль неможливе. Між тим співвідношення (1) одержано при діленні $P(x)$ на $x - a$».

Відповідь. Справа в тому, що ділення многочленів визначається так: ми будемо говорити, що многочлен $Q(x)$ є частка від ділення многочлена $P(x)$ на $x - a$, а число R — остача, якщо має місце тотожність $P(x) = (x - a) \times Q(x) + R$ при будь-яких значеннях x; тому в повній відповідності з визначенням ми можемо покласти $x = a$.

Заняття 17

Запрошуються всі учні старших класів.

Розв'язуються задачі практичного змісту.

Задача № 1. Чотирисхилий дах будинку, довжиною 12,5 *м* і шириною 7,2 *м*, має схил в 40°.

Скільки квадратних метрів заліза піде на покриття, якщо витрати на згин і обрізки становлять 6%?

Задача № 2. Силосна траншея має в перерізі форму рівнобедреної трапеції з основами 2 *м* і 3,5 *м* і висотою 4 *м*. Стіни і дно траншеї облицьовані цеглою завтовшки 25 *см*. Якої довжини траншею слід вирити для вміщення в ній 120 Т силосу (питома вага силосу $0{,}5 \frac{\text{Т}}{\text{м}^3}$)? Скільки цегли по-

трібно для облицювання траншеї? (На 1 *куб. м* кладки йде 400 цеглин).

Задача 3. Для риття каналу виділили один екскаватор, який щодня вибирав по a $м^3$ грунту. Через деякий час з метою швидшого завершення робіт був надісланий ще один екскаватор на допомогу першому. На цей час перший вибрав n $м^3$ грунту.

Визначити, за скільки днів обидва екскаватори закінчать всю роботу m, якщо відомо, що другий щодня вибирав по $в$ $м^3$ грунту?

Дослідити задачу. (Задачу склав уч. 10 класу Гусєв Е.)

Відп. $\frac{m-n}{a+b}$.

Задача 4. З Миколаївського порту вийшли два дизель-електроходи «Новий» і «Комсомолець», збудовані для китобійної флотилії «Слава».

Вони взяли курс на Антарктиду. Один з них ішов найкоротшим шляхом через Суецький канал, і шлях цей дорівнював m *км*. Другий — через Гібралтарську протоку навколо Африки і зробив n *км* шляху.

На місце промислу вони прибули одночасно.

Скільки днів вони перебували в дорозі, якщо перший проходив на a *км* в день менше, ніж другий?

Дослідити задачу. (Задачу склав учень X класу Паршуков М.)

Відп. $\frac{na}{n-m}$. $(n \neq m)$.

Задача № 5. В 1965 році в нашій країні буде вироблено 800 млн. *м* бавовняних тканин, 500 млн. *м* шерстяних тканин, 635 млн. *м* льняних тканин і 1485 млн. *м* шовкових тканин.

Скільки метрів тканин припадатиме в середньому на душу населення, якщо населення СРСР становитиме 215 млн. чоловік? Скільки разів можна обгорнути цією тканиною земну кулю по екватору, якщо радіус кулі взяти рівним 6370 *км*?

Скільки разів вистачить простелити шлях до Місяця, якщо віддаль до Місяця дорівнює 400 000 *км*?

Математичний софізм. Всяка кількість дорівнює своїй половині.

Доведення. Нехай a і $в$ дві рівні кількості: $a = в$. Помножимо обидві частини цієї рівності на a. $a^2 = ав$.

Тепер зменшимо на $в^2$ і ліву і праву частини рівності. Одержані різниці $a^2 - в^2$ і $aв - в^2$ також будуть рівними: $a^2 - в^2 = aв - в^2$.

Розкладемо на множники:

$$(a + в)\ (a - в) = в\ (a - в).$$

Поділимо обидві частини рівності на $a - в$; після чого одержується така рівність:

$$a + в = в.$$

Так як $в = a$, то в останній рівності можемо замінити $в$ через a, тоді $a + a = a$, або $2a = a$.

Розділивши на 2, одержимо $a = \frac{a}{2}$, а це значить, що ціле дорівнює своїй половині (?)

Примітка. Кількість практичних вправ і задач, відведена на окремі заняття гуртка, може бути зменшена, в залежності від математичної підготовки учнів тієї чи іншої школи.

Додаток

ПРАКТИЧНІ РОБОТИ З МАТЕМАТИКИ В ШКІЛЬНІЙ МАЙСТЕРНІ[1]

1. Виготовлення процентного транспортира.
2. Виготовлення радіанного транспортира.
3. Виготовлення клинометра.
4. Виготовлення моделей, що ілюструють геометричні місця точок.
5. Виготовлення моделі перетворення правильного многокутника в правильний многокутник з числом сторін у два рази більшим.
6. Виготовлення різноманітних математичних таблиць.
7. Виготовлення моделі перетворення правильного вписаного шестикутника в правильний описаний шестикутник.
8. Виготовлення наочних посібників для початку вивчення стереометрії.
9. Виготовлення логарифмічної демонстраційної лінійки.
10. Виготовлення моделі для ілюстрації геометричного місця точок в просторі, однаково віддалених від двох точок простору.

---

[1] Йде мова про практичні роботи, виконані членами математичного гуртка середньої школи № 2 м. Олександрії.

11. Виготовлення моделей до задач, зв'язаних з двогранними кутами.

12. Виготовлення моделей для унаочнення задач, зв'язаних з тригранними кутами.

13. Виготовлення електрофікованої вітрини на тему «Функція».

14. Виготовлення правильних многогранників (динамічних чотиригранних, п'ятигранних та шестигранних призм).

15. Виготовлення моделі тригранної піраміди для доведення її об'єму.

16. Виготовлення моделей динамічних чотиригранної і шестигранної піраміди.

17. Виготовлення динамічної моделі шестигранної зрізаної піраміди.

18. Виготовлення динамічної моделі циліндра і конуса.

19. » моделі призматоїда.

20. » моделей тіл обертання.

21. » моделі конуса з вписаною в нього кулею.

22. » моделі кулі.

23. » моделі вписаних до многогранників куль.

24. » приладів для практичних робіт на місцевості.

25. Виготовлення номограм: (в кабінеті математики і креслення)

1) для множення і ділення чисел;
2) для обчислення площ правильного трикутника за радіусом описаного кола;
3) для обчислення площі круга;
4) для обчислення бічної і повної поверхні циліндра;
5) для піднесення чисел до куба;
6) для обчислення бічної і повної поверхні конуса;
7) для обчислення об'єму циліндра;
8) для обчислення поверхні кулі;
9) для обчислення об'єму кулі;
10) до теореми Піфагора;
11) для розв'язування трикутників (рис. 20).
12) для розв'язування квадратних рівнянь і ін.

Математичний гурток X класу СШ № 6 м. Кіровограда (вч. Зеленецька і Сідова) в 1957—58 н. р. працював над питанням вивчення елементів вищої математики. На першому

занятті гуртка виявилась загальна думка всіх членів гур
ка займатися в основному вищою математикою.

На протязі року членами гуртка були вивчені слідую
питання:

1. Границі змінної величини.
2. Поняття про похідну і її геометричний зміст.
3. Знаходження похідних функцій:

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = a^x,\ y = \log_a x.$$

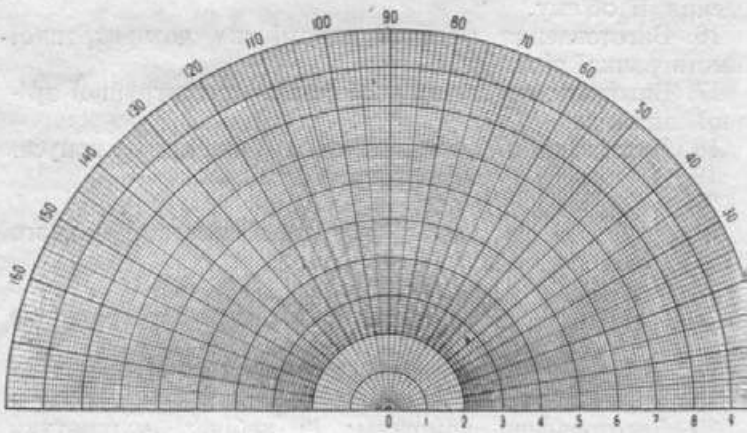

Рис. 20.

4. Знаходження похідної добутку, частки, складн
функції і зв'язок між похідними прямої і оберненої функці
5. Поняття диференціалу і його геометричний зміс
6. Поняття інтегралу і його геометричний зміст.
7. Інтеграли найпростіших функцій.

Кожне заняття гуртка тривало півтори-дві годин
Перша година переважно відводилась для доповіді, а пот
пропонувались задачі, розв'язування яких вимагало знань
повідомлених доповідачем.

Доповіді готували самі учні, вчитель лише керуваі
цією роботою і давав необхідні роз'яснення, вказував лі
тературу тощо.

Як посібник здебільшого використовувались окрем
розділи з підручника Лузіна і Фіхтенгольця.

До наступного заняття готувався не лише один допові
дач, а й усі члени гуртка знайомилися зі змістом доповіді

тому заняття проходило при активній участі всіх гуртківців. Доповідачеві давали питання, а деякі учні доповнювали доповідача.

Додому учням давались завдання, які усіма членами гуртка використовувались акуратно.

На заняттях гуртка розглядалися оригінальні задачі, для розв'язування яких достатньо було знань програми середньої школи, але їх зміст відрізнявся від тих, які звичайно розв'язувались у класі.

Наприклад, на гуртку розв'язувались такі задачі:

1) Розв'язати систему рівнянь:

а)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 &= -3 \\ x_5 + x_6 + x_7 &= -9 \\ x_6 + x_7 + x_8 &= -6 \\ x_7 + x_8 + x_9 &= -2 \\ x_8 + x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

б) Знайти умови, яким повинні задовольняти дані числа α_1, α_2, α_3, α_4 для того, щоб система:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \alpha_1 \cdot \alpha_2, \\ x_1 + x_3 &= \alpha_1 \cdot \alpha_3, \\ x_1 + x_4 &= \alpha_1 \cdot \alpha_4, \\ x_2 + x_3 &= \alpha_2 \cdot \alpha_3, \\ x_2 + x_4 &= \alpha_2 \cdot \alpha_4, \\ x_3 + x_4 &= \alpha_3 \cdot \alpha_4 \text{ мала розв'язки.} \end{aligned}$$

в) Знайти умови, яким повинні задовольняти дані числа α_1, α_2, ..., α_n для того, щоб система:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} + x_m = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1} \cdot \alpha_m,$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{m-1} + x_{m+1} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1} \cdot \alpha_{m+1},$$
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
$$x_{n+m-1} + x_{n+m-2} + \ldots + x_{n-1} + x_n =$$
$$= \alpha_{n+m-1} \cdot \alpha_{n+m-2} \ldots \alpha_{n-1} \cdot \alpha_n \text{ мала розв'язки.}$$

(Розв'язували також систему n рівнянь з n невідомими).

2. Знайти таку арифметичну прогресію, в якій між сумою її перших x членів і сумою kx послідуючих за ними членів існувало стале відношення, що не залежить від x.

3. Довести, що для двох прогресій: геометричної a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$ і арифметичної $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$, для яких $\frac{a_2}{a_1}$ і $b_2 - b_1 > 0$ існує таке число α, що $\log_\alpha a_n - b_n$ не залежить від n.

4. Дано: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Довести, що хоч би два з чисел a, b і c — взаємно протилежні числа.

5. Довести методом математичної індукції:

$$(2^{2^0}+1)\cdot(2^{2^1}+1)\cdot(2^{2^2}+1)\ \ldots\ (2^{2^n}+1) = 2^{2^{n+1}} - 1.$$

6. Довести, що різниця між сумою квадратів віддалей довільної точки площини до двох протилежних вершин паралелограма і сумою квадратів віддалей від тієї ж точки до інших вершин паралелограма є величина стала.

7. Через кінці A і B діаметра кола проведені дві хорди: AC і BD, які перетинаються в точці P всередині кола. Довести, що $AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP$.

З тригонометрії здебільшого розв'язувались тригонометричні рівняння різних типів, наприклад: знайти $\operatorname{tg} 2x$ з рівняння

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

Задачі в основному бралися із задачників Моденова, Антонова, Вигодського, Нікітіна і Санкіна, Шахно, Барибіна і Ісакова, а також використовувались ті задачі, які пропонувалися на математичних олімпіадах.

Задачі пропонувалися додому, і учні їх розв'язували заздалегідь. На гуртку ці задачі глибоко аналізувалися, знаходилися помилки і недоліки в міркуваннях.

Крім чисто математичних задач, розв'язувались і чисто логічні задачі, як, наприклад, відома задача про п'ять ковпаків (трьох білих і двох чорних) і трьох мудреців, а також задачі про знаходження при допомозі трьох зважувань фальшивої монети із дванадцяти. Ці задачі також викликали інтерес учнів, давали можливість їм відпочити і швидко ставали надбанням інших учнів класу і навіть школи.

Вивчення елементів вищої математики в гуртку для учнів десятих класів принесло велику користь. Насамперед це розширює їх математичний кругозір, розкриває широке застосування математики, зв'язок її з іншими науками. Одночасно це їм допомагає і краще засвоїти програмний матеріал з математики. Гуртківці дуже добре засвоїли ідею

функціональної залежності величин, поняття границі змінної величини, графіки функцій, зв'язок між прямою й оберненою функцією і їх графіками (а цей матеріал, як відомо, важкий для засвоєння), внаслідок чого на екзаменах на атестат зрілості всі члени гуртка показали грунтовні й свідомі знання з математики.

* * *

В сільській школі в позакласній роботі з математики є можливість навчити учнів тих практичних навичок, які необхідні в роботі обліковця бригади будь-якого сільськогосподарського профілю, найпростіших господарських розрахунків тощо.

Такий напрямок у позакласній роботі дає цінний матеріал для навчальних занять, забезпечує тісний зв'язок математики з біологією, фізикою, хімією, машинознавством та іншими предметами.

В основу цих робіт можна покласти знайомство з різними довідниками й таблицями, складання господарських кошторисів, ведення прибутково-видаткових відомостей, обчислення площ ділянок різної форми, складання раціону харчування тварин, обчислення об'ємів різних об'єктів, внесення добрив у грунт і ряд інших робіт.

Наведемо теми окремих занять математичних гуртків Онуфріївської СШ, Онуфріївського району (вчитель Голіцин В. Т.) і Червонокам'янської СШ (вчитель Куженко В. А.)

Заняття 1. Мета, завдання і план роботи гуртка на навчальний рік. Вибори ради гуртка і редколегії газети «Математика в сільському господарстві».

Заняття 2. Тема «Інвентаризація».

Заняття 3—5. Тема «Елементи обліку в колгоспі».

Заняття 6—7. Тема «Складання кошторису».

Заняття 8. Тема «Складання раціону харчування».

Для встановлення режиму годівлі корів, при якому забезпечуються найбільші надої молока, доярки повинні знати, наприклад, формулу калорійності молока корови: $Q = (P \cdot 113{,}6 + 300) \cdot K$, де K — кількість кілограмів молока корови, P — процент жирності, який береться в межах $3 \leqslant P \leqslant 4{,}5$.

Заняття 9. Тема «Визначення ваги пального в бочках».

Подаємо кілька випадків розв'язання цього завдання.

Випадок 1. Бочка повна стоїть на днищі.

Об'єм визначається за формулою:

$V = \frac{1}{4} \cdot \pi D^2 \cdot H$, де D — діаметр днища, H — висот бочки.

Діаметр і висота легко визначаються безпосереднім ви мірюванням.

Випадок 2. Бочка стоїть на днищі неповна.

Об'єм визначається за формулою:

$$V = \frac{1}{4} \pi D^2 \cdot h,$$

де h — висота стовпа пального в бочці.

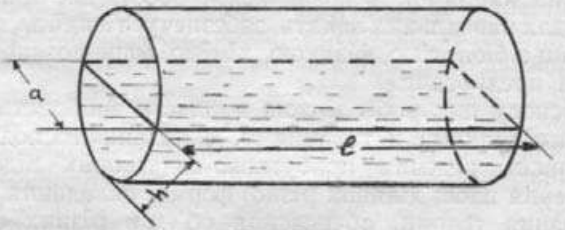

Рис. 21.

Висота h вимірюється так: опускаємо дерев'яний стри жень через отвір в бочку до дотику з нижнім дном бочк (вертикально).

Виймаємо стрижень і вимірюєм довжину його змочено частини, яка і визначає висоту стовпа пального.

Випадок 3. Бочка лежить неповна (рис. 21). Об'є пального дорівнює об'єму тіла, висотою якого є висота бо ки, а основою — круговий сегмент.

Для визначення об'єму треба знати площу круговог сегменту і висоту бочки l. Висота бочки l вимірюється бе посередньо. Висоту сегмента (стрілку) визначаємо анал гічно визначенню h у випадку 2.

При незначному наповненні бочки об'єм визначаєть за формулою

$$V = \frac{2}{3} \cdot ahl,$$

де R — радіус днища, а «a» визначається за формуло

$$a = 2\sqrt{R^2 - (R - h)^2}.$$

При більшому наповненні бочки площу сегменту можна визначити за формулою (1) $S = \frac{R^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ} - \sin\alpha\right)$, де α — довжина дуги, що стягує хорду a.

Але так як визначення α викликає значні труднощі, то можна обмежитися формулою (1), яка цілком задовольняє практичні цілі.

Аналогічно (випадки 1, 2) виконується визначення ваги пального в цистернах.

Заняття 10. Тема «Визначення ваги сіна в скирдах і стіжках».

Пояснення.

Для визначення об'єму скирд користуються формулою $V = (0{,}52П - 0{,}45Ш)\,ШД$, де $Ш$ — ширина скирди, $Д$ — довжина, $П$ — довжина перекидки.

Ця формула дає точність результату до 5% і цілком придатна для практичних цілей.

Для визначення об'єму стіжка використовують формулу

$$V = \frac{П}{2} \cdot \left(\frac{L}{6}\right)^2, \text{ де}$$

$П$ — перекидка,

L — довжина кола основи.

Приклад 1. Визначити вагу скирди степового злежаного сіна, якщо через 27 днів після вкладання вона має об'єм 103 $м^3$. За таблицею знаходимо, що вага 1 $м^3$ названого сіна через 1 місяць після вкладання рівна 60—62 *кг*.

Знаходимо вагу скирди:

$$60\ кг \cdot 103 = 6180\ кг = 61{,}8\ ц.$$

Приклад 2. Знайти вагу стіжка лісового сіна через 1 місяць після вкладання, якщо об'єм стіжка 4 $м^3$:

$$65\ кг \cdot 74 = 4810\ кг = 48{,}1\ ц.$$

Приклад 3. Визначити, скільки сухого фуражу (сіна й соломи) заготовили колгоспники підшефного колгоспу.

Члени гуртка заміряли скирди колгоспу методом перекидки. Після цього на засіданні гуртка, користуючись матеріалами замірювань, було обчислено об'єм емпіричною формулою:

$$V = \left(\frac{n + a}{4}\right)^2 - b.$$

де V — об'єм скирди; n — поперечна «перекидка» чере скирду від землі до землі; a — ширина і b — довжина скир ди. Матеріали обчислень передані колгоспу.

Заняття 11. Тема «Визначення ваги тварин».

Члени гуртка були обізнані з такими способами визна чення ваги тварин без зважування:

а) для визначення живої ваги коня (в кілограмах) треб обхват за передніми ногами (в сантиметрах) помножити н 6 і відняти 620;

б) для визначення живої ваги корови (в кілограма треба довжину (в сантиметрах) по діагоналі тулуба (ві кореня хвоста до передньої лопатки) помножити на довжин обхвату за передніми ногами і добуток поділити на 5

в) для визначення живої ваги свині (в кілограма треба довжину від потилиці до хвоста (в сантиметра помножити на довжину обхвату за передніми ногами і д буток поділити на 430 для вгодованих свиней і на 480 дл свиней середньої вгодованості та на 530 для невгодовани

Після визначення цих способів на засіданні гуртка бу проведено екскурсію в колгосп, де практично перевірено правильність.

Заняття 12. Тема «Квадратно-гніздовий спосіб посад картоплі і кукурудзи».

На занятті, перед практичною роботою учні ознайом лися з застосуванням паралельних прямих при маркіров поля та обрахунками норм висіву картоплі саджалко СКГ-4. Вивели формулу:

$$Q = \frac{10 \cdot qk}{a^2},$$

де Q — витрати картоплі в $\frac{кг}{га}$,

q — середня вага бульби в грамах;

k — кількість бульб, що кладуться в гніздо;

a^2 — площа квадрата в $м^2$;

а також формулу $M = \frac{b+a}{2} + c$ для обчислення довжи маркерів, де: b — віддаль між крайніми сошниками ка топлесаджалки (в метрах); a — віддаль між внутрішні краями гусениць або ребордами передніх коліс тракто (в метрах); c — величина міжряддя (в метрах). В остан формулі знак плюс береться для лівого маркера; знак м нус — для правого. Хід практичної роботи складався таких частин:

1. Вступна бесіда агронома колгоспу про значення квадратно-гніздової посадки картоплі.

2. Ознайомлення з будовою картоплесаджалки.

3. Встановлення маркерів. Учні виконують вимірювання: відстань між внутрішніми краями гусениць $a = 1{,}10$ *м*; відстань між крайніми сошниками картоплесаджалки $в = 2{,}10$ *м*. Величина міжрядь, як відомо, дорівнює 0,70 *м*. Учні заносять ці дані в записну книжечку і обчислюють:

$$M_{пр.} = \frac{b-a}{2} + c = \frac{2{,}1-1{,}1}{2} + 0{,}7 = 1{,}20 \text{ м}.$$

$$M_{лів.} = \frac{b+a}{2} + c = \frac{2{,}1+1{,}1}{2} + 0{,}7 = 2{,}30 \text{ м}.$$

4. Розмітка поля.

5. Підсумки роботи. При виконанні практичних робіт учні були забезпечені віхами, мірною стрічкою, екерами, шнурами, рулетками, записними книжками.

Заняття 13. Обчислення на рахівниці.

Заняття 14. Обчислення на арифмометрі.

Заняття 15. Знімання плану на місцевості з допомогою теодоліта.

Заняття 16. Маркіровка поля при посівах.

Заняття 17. Геометрія в будівельній справі і ін. (Після кожного заняття на такі теми проводиться практична робота, мета якої зводиться до закріплення одержаних на занятті гуртка знань).

Тісний зв'язок гуртківців з сільськогосподарським виробництвом створює можливість для залучення учнів до агітаційно-масової роботи. Гуртківці через шкільну газету можуть знайомити учнів з кращими працівниками колгоспу, механізаторами. Складаючи графік удоїв молока, одержаних доярками, відбиваючи хід соціалістичного змагання трудівників полів, вони сприяють пропаганді передового досвіду, підтягують відстаючих працівників до рівня передових.

Організація різних форм позакласної роботи в школі, зв'язаних з сільськогосподарською працею, допоможе розв'язати важливу задачу — поповнення рядів трудівників полів випускниками середніх шкіл.

У плані роботи математичних гуртків Онуфріївської і Червонокам'янської шкіл передбачалися також і такі питання:

1. Ознайомлення учнів з життям і науковою діяльністю вітчизняних математиків.

2. Виготовлення наочних приладь з математики.

3. Організація випуску бюлетня «Чи все ти знаєш?»

4. Проведення математичних олімпіад.

5. Підготовка математичного вечора.

6. Розв'язування різних головоломок і задач прикладного характеру й ін.

* * *

В СШ № 11 м. Кіровограда, крім гуртка 8—10 класів, існує також гурток для учнів 5—7 класів, яким керує вчителька Л. В. Марущак.

Матеріал для занять гуртка підбирається вчителем, але окремі задачі пропонують і самі учні.

Багато уваги приділяється оформленню робіт, які проводяться на заняттях; кожен член гуртка має окремий зошит, в якому записуються розв'язування кожної задачі, якщо в учнів виникають труднощі щодо оформлення записів розв'язування, то вчитель диктує його учням, так як записи розв'язування задач сприяють підвищенню розвитку учнів, привчають їх до грамотних математичних формулювань, примушують перевіряти обгрунтованість розв'язку.

В кінці кожного заняття гуртка ($1\frac{1}{2}$ — 2 години) учні одержують для роботи дома задачу і приклад такого ж типу, які розглядалися на заняттях. Якщо завдання викликало труднощі, то в кінці занять воно обговорювалось, інколи складався план розв'язування.

На заняттях гуртка учні V класів були ознайомлені з римською, слов'янською системами нумерації, а також сучасною системою нумерації.

На заняттях гуртка учні VI класів більш глибоко ознайомлювалися з питаннями про прості числа; було розглянуто «решето Ератосфена», нескінченність множини простих чисел і розподіл простих чисел в натуральному ряді чисел; учні ознайомилися з проблемою Гольдбаха: «Будь-яке число, більше одиниці, є сумою не більше трьох простих чисел».

Учні розповіли про великого російського математика П. Л. Чебишева, який встановив формулу для наближеного обчислення кількості простих чисел, що не перевищують даного числа N; про роботи радянських математиків

Л. Г. Шнірельмана і академіка Виноградова, в зв'язку з проблемою Гольдбаха.

Всі ці питання склали один із розділів роботи гуртка — поглиблення знань учнів з теоретичного курсу, зв'язаному з програмним матеріалом з арифметики.

Другим розділом роботи гуртка з'явилось підвищення обчислювальної культури. Були розглянуті слідуючі питання:

1. Прийоми усного множення на 9, на 11, на 15, на 125.

2. Спосіб множення чисел, що не перевищують 20. Наприклад, щоб помножити 17 на 18, можна послідовно виконати слідуючі обчислення:

$17 + 8 = 25;\ 25 \cdot 10 = 250;\ 7 \cdot 8 = 56;\ 250 + 56 = 306.$

Всі ці обчислення виконуються усно і запис умовно можна розташувати так:

$$\begin{array}{r} 25 \\ +\ 56 \\ \hline 306 \end{array}$$

Було розглянуто на прикладах і обгрунтування цього способу, користуючись при цьому розподільчим і сполучним законом множення.

$17 \cdot 18 = 17 \cdot (10 + 8) = 17 \cdot 10 + (10 + 7) \cdot 8 = 17 \times \times 10 + 10 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = (17 + 8) \cdot 10 + 7 \cdot 8 = 250 + 56 = 306.$

3. Спосіб множення двозначних чисел, в яких цифри десятків однакові, а сума одиниць складає 10; наприклад, щоб обчислити $33 \cdot 37$, можна послідовно виконати слідуючі обчислення:

$33 \cdot 37 = 33 \cdot (30 + 7) = 33 \cdot 30 + 33 \cdot 7 = (30 + 3) \cdot 30 + + (30 + 3) \cdot 7 = 30 \cdot 30 + 30 \cdot 3 + 30 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 30\,(30 + + 3 + 7) + 3 \cdot 7 = 30 \cdot 40 + 3 \cdot 7 = 1221.$ Як наслідок з цього одержали правило для піднесення до квадрату чисел, що закінчуються п'ятіркою.

Розглядалися і деякі інші прийоми скороченого множення.

Третім розділом роботи гуртка було розв'язування задач і прикладів підвищеної трудності, задач і прикладів на кмітливість, цікавих задач-жартів, задач, формулювання умови яких наштовхують на помилковий розв'язок. Такі задачі можна взяти в книгах: Г. Б. Поляк, Цікаві задачі, учпедвидав, 1948; Я. І. Перельман, Цікава арифметика, С. В. Філічев і Я. Ф. Чекмарьов, Збірник задач і вправ

з арифметики, 1949; С. А. Пономарьов і М. І. Сирнев, Збірник арифметичних задач, 1951; матеріали до математичних олімпіад й ін.

На заняттях гуртка розглядалися:

1. Приклади з пропущеними цифрами.

2. Приклади, в яких вимагалось визначити одне невідоме число.

3. Приклади з дробами на перетворення, наприклад

а) $\frac{1}{12} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$;

б) $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots + \frac{1}{9900} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{2} - \frac{1}{100} = \frac{49}{100}$ й ін. і узагальнення при доведенні нерівності:

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+m) \cdot (n+m+1)} < \frac{1}{2}$$

де n і m — натуральні числа.

4. Задачі приблизно такого змісту:

а) знайти найменше число, яке дає при діленні на 2, на 3, на 4, на 5 і при діленні на 6 кожен раз в остачі 1;

б) дописати до перших трьох цифр шестизначного числа 523*** недостаючі три цифри такі, щоб число поділилося без остачі на 7, на 8 і на 9;

в) скільки існує цілих чисел, менших тисячі, які не діляться ні на 5, ні на 7?

г) знайти найменше число, що починається цифрою 1 і таке, що якщо переставити цифру на кінець, то одержане число буде втроє менше початкового;

д) довести, що будь-яке ціле число карбованців, більше 7, можна заплатити без здачі грошовими білетами вартістю в 3 крб. і в 5 крб.;

е) визначити P, якщо $P + 10$; $P + 14$ — прості числа;

ж) якщо P і q — прості числа, більші 3, то $P^2 - q^2$ ділиться на 24. Довести.

Поруч з наведеними прикладами були розглянуті приклади із збірника задач з алгебри Ларічева № 685, 7[illegible], 745, 746, 777(5), із збірника Філічева — Чекмарьова № 2076—2087; було показано розв'язування арифметичних задач на зрівнювання способом складання системи двох рівнянь 1-го степеня з двома невідомими й ін.

Розв'язувались також більш важкі задачі на рух, на виконання роботи, на проценти й ін.

Учні 5—7 класів на заняттях математичного гуртка вивчають арифмометр і набувають практичних навичок в роботі з ним.

* * *

Примірна тематика занять математичних гуртків для V—X класів середньої школи.

V-й клас

1. Цікаві задачі (декілька занять).
2. Числові ребуси.
3. Математичні ігри і фокуси (декілька занять).
4. Арифметична вікторина.
5. Складання і розв'язування задач практичного змісту.
6. Організація і проведення математичних вечорів.

VI-й клас

1. Різні системи числення.
2. Прості числа і решето Ератосфена.
3. Алгоритм Евкліда.
4. Наближені обчислення.
5. Прийоми швидких обчислень (декілька занять).
6. Про міри і вимірювання величин у різних народів і в різні часи.
7. Російська рахівниця і робота на ній. (Декілька занять).
8. Розв'язування задач логічного характеру і задач на доведення.
9. Збирання матеріалу, складання і розв'язування задач, що відбивають соціалістичне будівництво в СРСР.
10. Виготовлення саморобних приладів з математики і робота з ними.
11. Організація і проведення математичного вечора на тему «Великий російський математик М. І. Лобачевський».

VII-й клас

1. Як виникла геометрія.
2. Як виникла алгебра.
3. Прямі, обернені й протилежні теореми.
4. Доведення деяких алгебраїчних і геометричних нерівностей.

5. Збирання матеріалу і складання задач, що відбивають соціалістичне будівництво.

6. Історія мір і ваги.

7. Математичні софізми і помилки в математичних міркуваннях.

8. Виготовлення саморобних приладів з математики робота з ними (декілька занять).

9. Організація і проведення математичного вечора на тему: «Видатний російський математик С. В. Ковалевська».

VIII-й клас

1. Знайомство з арифмометром і робота з ним (декілька занять).

2. Детермінанти другого і третього порядку і їх застосування до розв'язування системи лінійних рівнянь.

3. Про елементарні графічні і наближені методи розв'язування рівнянь.

4. Графічне розв'язування нерівностей.

5. Про еквівалентні рівняння.

6. Чудові точки трикутника.

Примітка. Маємо на увазі деякі чудові точки, відмінні від тих, які вивчаються в шкільному курсі.

7. Пучки кіл.

8. Виготовлення саморобних приладів з математики робота з ними (декілька занять).

9. Організація і проведення математичного вечора на тему «Радянські математики — лауреати Ленінських премій».

IX-й клас

1. Логарифмічна лінійка і робота з нею (декілька занять).

2. Історія відкриття логарифмів.

3. Задачі на максимум і мінімум, що розв'язуються елементарними способами.

4. Збирання, складання і розв'язування задач з технічним, промисловим та сільськогосподарським змістом.

5. Неперервні дроби.

6. Розв'язування рівнянь в цілих числах.

7. Задачі поділу круга.

8. Побудови при допомозі одного лише циркуля.

9. Побудови при допомозі однієї лінійки при користуванні даними фігурами.

10. Виготовлення саморобних приладів з математики і робота з ними.

11. Моделювання псевдокулі, кулі і циліндра із пап'є-маше, як підготовча робота до занять по вивченню геометрії Лобачевського в елементарному викладі.

12. Елементарний виклад геометрії Лобачевського з використанням наочних посібників і таблиць.

13. Вечір, присвячений великому російському математику М. І. Лобачевському.

X-й клас

1. Метод математичної індукції.
2. Історичні відомості про розвиток поняття числа.
3. Деякі чудові нерівності.
4. Алгебраїчне розв'язування рівнянь третього і четвертого степенів.
5. Ефективне розв'язування задач на побудову за методом проф. М. Ф. Четверухіна (декілька занять).
6. Номограми і їх застосування до розв'язування практичних задач (декілька занять).
7. Моделювання многогранників і їх перерізів (декілька занять).
8. Виготовлення універсального шкільного кутоміра Д. М. Смичнікова і робота з ним.
9. Вимірювальні роботи на місцевості.

МАТЕМАТИЧНІ ВЕЧОРИ

Математичний вечір — одна з масових форм позаклас ної роботи, яка сприяє покращанню якості знань учнів математики.

Математичні вечори являються своєрідною формо звіту про роботу гуртків перед всім колективом школи і пе ред батьками.

На рік можна проводити 1—2 математичні вечори, при свячувати їх певним питанням з історії вітчизняної мате матики, життя і діяльності корифеїв російської математич ної науки, висвітлення місця і значення математики в си стемі наук, її застосування в побуті, в техніці, в сільському господарстві, в практиці соціалістичного будівництва тощо

Підготовка й проведення цього досить важливого за ходу потребує кропіткої роботи вчителів математики, всього педагогічного колективу та членів математичних гуртків, які разом з учнівським та шкільним комсомольським активом є організаторами таких вечорів.

Підготовку до вечора треба розпочинати з обговорення на шкільній предметній комісії вчителів математики плану вечора на відповідну тему та розподілу обов'язків між вчителями.

На черговому занятті гуртка ознайомлюють учнів з планом проведення вечора. Гуртківці вносять в цей план свої побажання та пропозиції.

Для керівництва всією підготовчою роботою на засі данні математичного гуртка за місяць — два до вечора вибирається комісія (в склад якої входить керівник ма тематичного гуртка і декілька (5—6) учнів — членів ма тематичного гуртка, що займається підбором задач та вправ для олімпіади, вікторини, розподілом завдань між гурткі цями, встановлює термін виконання тієї чи іншої ділянки

роботи, намічає день проведення вечора тощо. Після того, як буде остаточно вироблений план вечора, треба вивісити плакат, присвячений проведенню вечора.

Для успішної організації й підготовки до вечора бажано в математичному гуртку організувати секції. Перша секція вимірників, аматорів геометрії. Вони розв'язують складні задачі на побудову, вимірюють площі і об'єми фігур, виготовляють вимірювальні прилади, навіть оригінальні, і виконують різноманітні вимірювальні роботи на місцевості.

Члени другої секції вивчають і самі знаходять різні прийоми обчислень. В третій секції гуртківці розв'язують і складають задачі практичного змісту, цікаві задачі із застосуванням всіх відомих їм правил і формул. Члени четвертої секції вивчають історію математичної науки, знайомляться з біографіями великих російських математиків. Крім цих чотирьох секцій, звичайно можуть бути організовані ще й інші секції, в залежності від конкретних умов тієї чи іншої школи.

Одержавши завдання, учні працюють над ним; на засіданнях гуртка перевіряється стан та якість підготовки до вечора, надається відповідна допомога.

Коли все підготовлене, за кілька днів до вечора вивішується красиво оформлене оголошення про час проведення вечора та його програма.

До математичного вечора силами гуртківців випускається спеціальний номер математичної газети, підбираються фотомонтажі, організовується виставка учнівських робіт — математичних збірників, стінних газет, статей, саморобних наочних посібників тощо.

В школах Кіровоградської області відбуваються математичні вечори на різні теми.

Для прикладу опишемо три вечори, проведені в Олександрійських середніх школах №№ 1 і 2, де викладання математики і позакласна робота з цього предмету знаходяться на належному рівні, внаслідок чого і успішність з математики непогана.

Математичний вечір на тему «Математика і життя»

Цей вечір, присвячений питанню зв'язку математики з життям, відбувся в лютому 1957 року в час проведення семінару — практикуму вчителів математики Петрівсько-

го, Червонокам'янського, Олександрійського районів та міста Олександрії на базі Олександрійської СШ № 2 (вчитель Львовський Р. І.).

План вечора був обговорений на шкільній предметній комісії вчителів математики і розподілені обов'язки між вчителями.

Заздалегідь керівником гуртка було запропоновано

Рис. 22.

всім вчителям математики оголосити учням школи про організацію математичного вечора на тему «Математика і життя», а на засіданні гуртка було затверджено тему і програму вечора.

Підготовка до вечора проводилась членами гуртка, які одержали від керівника гуртка окремі завдання. Вони підбирали літературу, знаходили місцеві факти, ілюстрації для проектування через епідіаскоп і готували виступи, які прослуховувались зі сцени з метою удосконалення їх форми і змісту, працювали над оформленням сцени, виготовленням реквізіта до п'єси, плакатів тощо. І таким способом були підготовлені змістовні й цікаві доповіді і ілюстрації, які викликали живий інтерес у всіх присутніх.

Оригінальним вийшов виступ учениці Романової, який був задуманий в особливому плані; вона висловила всі мотиви й міркування, якими окремі учні здебільшого

виправдують свою зневагу до математики. Заперечення їй та спростування її доводів склали зміст останніх виступів.

Силами членів фотогуртка були виготовлені запрошення на математичний вечір (зразок яких подано на рис. 22), що були вручені за кілька днів до початку вечора тим 126 учням, що не мали трійок з математики протягом останніх двох тижнів.

Перед початком вечора керівником гуртка і старостою була складена програма цього вечора.

Передаємо зміст програми вечора, наводимо тексти виступів і даємо певні коментарії та зауваження щодо ходу вечора.

I

I. Вступне слово вчителя.
II. Відкриття вечора старостою математичного гуртка.
III. Виступи учнів:
1) Чи існує насправді зв'язок математики з життям? (уч. Романова).
2) Математика всюди (уч. Паршуков)
3) Епізод з оповідання Марка Твена «Странствование за границей» (уч. Урицький)
4) Про застосування геометрії і алгебри в житті (уч. Шабарова і Кулешов)
5) Застосування кібернетичних машин (уч. Шокотько).
6) Математика й виробництво (уч. Гусев) (на прикладах підприємства Бурвугілля).
7) Невдалий рейс (уч. Королюк).
8) Легенди про Архімеда (уч. Дацуг).
9) Цифри Китаю й Індії (уч. Лещинська).
10) Математика й музика (уч. Калішевич) (зі вставними музикальними демонстраціями).
11) Що показала дискусія (уч. Романова).

II

Інсценіровка легенди стародавнього Риму «Вознаграждение полководца» (учні: Рудь, Романко, Урицький, Кулешов).

III

Математична вікторина.

IV

Присудження премій.

Примітка: Всі ілюстрації демонструються через епідіаскоп.

Вступне слово вчителя математики:

«Товариші учні й шановні гості!

Сьогоднішній вечір присвячується важливій і актуальній темі «Математика й життя».

Дана тема надзвичайно широка, ми не в змозі висвітлити її всебічно, тому торкаємося лише окремих сторін цього питання, наголошуючи на необхідності знань законів математики в будь-якій професії, яку б не вибрав випускник середньої школи.

В нашій школі є багато учнів, які цікавляться математикою. Такі учні як Шабарова, Паршуков, Терехов та інші мають глибокі, міцні й систематичні знання з математики і вміють їх застосовувати при розв'язуванні практичних задач. Але є й такі учні, як, наприклад, Гусев, Дацук та інші, які хоч і мають гостру пам'ять і здатність до математичного аналізу, проте вони ще недостатньо і нерівномірно працюють, тому нерідко в них поряд з оцінкою «5» стоїть «3», а окремі учні мають ще низькі знання з математики.

Ми закликаємо присутніх учнів брати приклад з кращих і рівнятися на Шабарову, Терехова, Паршукова та ін.

Потім вечір відкриває староста гуртка, учень 9 класу Шаболтас, який надає слово ученниці 10 класу Романові, що зазначила:

«Виступаючи на математичному вечорі на тему «Математика й життя», я бажаю висловити деякі сумніви, які є у мене й інших моїх однокласників відносно зв'язку математики з життям. Наприклад, багатьма учнями в 6 класі дуже важко сприймаються формули квадрата суми й квадрата різниці двох чисел. В цих формулах нерідко пропускається учнями подвоєний добуток. Коли я вчилась в 6 класі, то думала: «А яка різниця? Хіба я в крамниці здам неправильно підрахую, якщо пропущу цей подвоєний добуток?». В старших класах я зрозуміла, що все це дуже важливо для вивчення послідуючих розділів алгебри

Без знань формул з курсу алгебри 6 класу неможливо засвоїти квадратних рівнянь, бінома Ньютона, комплексних чисел і багато іншого.

Але тут появилися нові сумніви; я не бачу, в яких життєвих потребах використовується біном Ньютона. Навіщо він потрібен токарю, слюсарю, пресувальнику, лаборанту, шоферу.

Або взяти комплексні числа. Я не можу навести жодного життєвого прикладу застосування комплексних чисел у практичному житті. Відомо, що математика виникла з практичних потреб людини. Але, з яких практичних потреб виникли комплексні числа? Квадратний корінь з від'ємної одиниці, ну, я розумію, що якщо в задачі одержується квадратний корінь із від'ємного числа, задача неможлива. А тут, ні, одержується «і», над яким можливі складні дії як в алгебраїчній, так і в тригонометричній формі. Помоєму, без арифметики неможливо стати культурною людиною, а без комплексних чисел і бінома Ньютона можна, вони ні до чого.

Піднесення двочлена до квадрату це ще, можливо, й зустрінеться в житті, хоч і дуже рідко, а ось піднесення його до четвертого степеня, десятого, дванадцятого...?

Те саме можна сказати і про рівняння, особливо вищих степенів.

Навіть логарифми, зміст яких зрозумілий, не мають ніякого застосування поза школою, і ніхто ними не користується. Це потрібно інженеру. А якщо я збираюсь стати, скажемо, музикантом? Навіщо мені логарифми?

Або взяти геометрію. Формули для обчислення поверхонь і об'ємів потрібні, ми розв'язували багато життєвих задач на застосування формул об'ємів та поверхень. Але є теореми, які зовсім не застосовуються на практиці. Ось, наприклад, я згадала теорему 9 класу, яка твердить, що опукла ламана коротша всякої іншої ламаної, що обводить першу. Ніхто не їздить із Олександрії до Дніпропетровська через Харків, навіть ті, що не вчили цієї теореми.

Або ці обернені тригонометричні функції. Така складна, нудна і незрозуміла тема!

Вчили ми її цілих два місяці, але де, як саме і коли застосовуються обернені функції, не знаю. Про це ж розповідають і дев'ятикласники, які знайомляться з $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ і т. ін.

А ще я чула, що існує геометрія Лобачевського, то вона навіть суперечить життю.

Лобачевський твердить, що сума кутів трикутника в різних трикутниках різна, але завжди менша 180°. Він говорить, що трикутники з рівними кутами рівні, але не подібні, що через точку поза прямою можна провести не одну, а багато прямих, паралельних даній прямій і т. д.

Ось мені не зрозуміло, нехай інші обгрунтують, як зв'язана математика з житям.

Я закінчую десятий клас. Чи потрібні мені будуть, якщо я не поступлю в вищий навчальний заклад, математичні формули й закони в моїй майбутній спеціальності бухгалтера, нормувальника, робітниці заводу «Червоний ливарник», чи брикетної фабрики? Іще хочу додати, що математика таки нудна й сухенька наука. Цілі уроки ми вивчаємо, що якщо $a > 0$ і $b > 0$, то $ab > 0$, або поняття про границі, або $-\frac{2}{3}$ в степені $-\frac{2}{3}$. Навіщо все це... Таке все це складне й відносне, що цікавого буває дуже мало.

Нехай зі мною посперечаються, хто не згоден, нехай розвіють, якщо зможуть, мої і багатьох інших учнів сумніви відносно ролі математики в житті».

Потім виступили ряд учнів із запереченнями Романовій.

Виступ учня Паршукова.

«Я хочу заперечити Романовій і торкнутися питання застосування математики всюди. По-моєму, Романова глибоко помиляється, беручи під сумнів тісний зв'язок математики з найрізноманітними галузями життя. В кожній галузі знань, в будь-якій професії потрібне знання математики. Без математики інженери не спроможні були б конструювати машини, архітектори не змогли б споруджувати будинки, агрономи — вирощувати врожаї, капітани водити кораблі і т. д.

Досить вдало з цього приводу говорив М. І. Калінін, зазначивши, що математика має величезне практичне застосування і що для всіх, хто мріє стати моряком, льотчиком, артилеристом, кваліфікованим робітником в різних галузях нашої промисловості, будівництва, металургії, слюсарем, токарем і досвідченим тваринником, садівником і ін., необхідні глибокі знання математики. І мені здається, що наш обов'язок «наповняти свої голови математикою», а не виявляти сумнів. Звичайно, математика не є наукою безперервних розваг. Вона, як і фізика, астрономія, хімія,

належить до точних наук і перебуває в тісному зв'язку з іншими науками, наприклад, історією, зоологією, природознавством тощо.

Я так розумію, що і природознавство, і математика вивчають реальний, оточуючий нас світ. Але природознавство вивчає світ з боку якісного стану, а математика — кількісну сторону.

Для прикладу зупинимося на будь-якому предметі і розглянемо, як до вивчення нього підходять з точки зору математики і з боку природознавства. Візьмемо кавун. Він, як відомо, має форму кулі, вивченням якої займається математика. Природознавство ж вивчає умови, при яких можливе було б вирощування найякісніших кавунів як щодо смаку, так і щодо розміру врожайності. Математиці байдуже, з чого зроблена куля, чи ця куля—кавун, чи ця куля з металу, важливо, що тіло має форму кулі, і математика торкається її кількісної сторони, займаючись вивченням розмірів цього тіла.

Безумовно, що вивчати смакові якості тіла цікавіше ніж вивчати його з точки зору розмірів. Але без математики не обійтись і при купівлі кавунів.

Наприклад, ціна одного малого кавуна 1 крб., а кавуна подвійного діаметра —6 крб. Що вигідніше купити: за 6 крб. один великий кавун, чи 6 маленьких? Тут дає відповідь математика, яка твердить, що об'єми тіл відносяться, як куби їх радіусів, або діаметрів. Отже, кавун подвійного діаметра більший за своїм об'ємом ніж кавун маленький в 2^3 рази, тобто у 8 раз, тому вигідніше купити 1 великий кавун, ніж 6 чи навіть 7 маленьких за ту ж саму ціну.

Можливо цей приклад і не розвіє сумніву в декого з вас. Але таких прикладів можна навести дуже багато.

Без математики не можно було б передбачити довжину підземного тунелю, лінію метро, шахти. Без математичних розрахунків будівники Московського метро, які ведуть прокладку одночасно двох кінців радіуса, ніколи не змогли б зійтися в центрі.

В романі «Хлопчик-моряк» (або «На дні трюма») Майн-Рід розповідає про юного любителя морських пригод (рис. 23), який не маючи коштів заплатити за переїзд, змушений був пробратися в трюм невідомого корабля, де несподівано виявився закупореним на весь час морського

Рис. 23.

переходу. Раптом хлопчик натрапив на ящик сухарів і бочку води.

Розсудливий хлопчик розумів, що з цим обмеженим запасом їжі і води треба бути по можливості обережним, тому

вирішив поділити його на щоденні порції. Перелічити сухарі було справою легкою, але поділити на порції воду, не знаючи її загального запасу, було не так просто. Намагаючись визначити запас води в бочці, хлопчик вміло переміг усі труднощі, зв'язані з відсутністю вимірювальних інструментів, і все ж визначив об'єм води, примінивши спрощені математичні формули і усний рахунок.

В основу своїх розрахунків він поклав знання свого росту (4 фути) і знання початкових відомостей з геометрії, зокрема того факту, що бочку можна розглядати, як два зрізані конуси, складені своїми більшими основами.

Якщо (рис. 24) позначимо радіус менших основ через r, радіус більшої основи через R, а висоту бочки, тобто по-

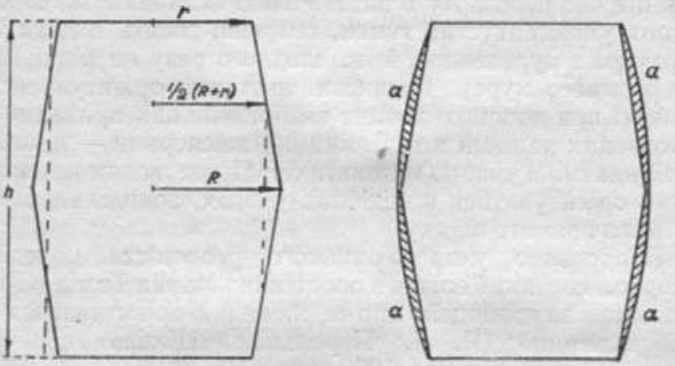

Рис. 24.

двійну висоту кожного зрізаного конуса, через h, то об'єм, одержаний хлопчиком, виразиться формулою:

$$\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi h}{4} \cdot (R^2 + r^2 + 2Rr).$$

Юний математик Майн-Ріда не сам придумав цю формулу для обчислення об'єму бочки, вона приводиться в деяких посібниках геометрії для наближеного обчислення місткості бочок.

На півдні Франції, наприклад, вживається проста формула: об'єм бочки $V = 3{,}2hRr$, яка цілком виправдовує себе на практиці.

Далі виступив староста гуртка учень Шаболтас.

«Дорогі друзі, ви, звичайно, пам'ятаєте переліт славнозвісного Героя Радянського Союзу М. М. Громова і його

товаришів із Москви до Сан-Джесінто через Північний полюс, коли за 62 години і 17 хв. польоту М. М. Громовим було встановлено два світових рекорди на безпосадочний переліт по прямій (10200 *км*) і по ламаній (11500 *км*).

Але мало хто задумувався над тим, які величезні математичні розрахунки потрібно було виконати для його здійснення. Адже літак в момент польоту приймав участь в обертанні земної кулі, тобто літак обертався разом з Землею навколо земної осі. Питання про трасу перельоту і взагалі про рух не буде мати смислу, якщо при цьому не буде вказана математикою система відліку. Отже і тут без математики не обійшлось.

Слід відмітити, що літак М. М. Громова і його товаришів під час перельоту в надзвичайно складних метеорологічних умовах (густий туман, темрява, досить низька температура з хуртовиною й ін.) жодного разу не відхилявся від заданого курсу. Радянські льотчики орієнтувалися в польоті при допомозі точних вимірювальних приладів, виготовлених нашими вітчизняними інженерами — приладобудівниками з участю математиків Проте людям не завжди легко орієнтуватися в подібних умовах, вони схильні збиватися з прямого шляху.

Попрохаємо учня Урицького розповісти комедійну історію, невеликий епізод з оповідання Марка Твена «Странствование за границей» про те, як важко орієнтуватися людині в темряві: (Я. І. Перельман, Цікава геометрія, стор. 176—178. Москва, 1950 р.)».

Надається слово учневі 10 класу Урицькому, який розповів:

«Я прокинувся і відчув жадобу. Мені прийшла в голову чудова думка — одягнутися, вийти в садок і освіжитися, обмившись біля фонтана.

Я піднявся потихеньку і почав розшукувати свої речі. Відшукав одну шкарпетку. Де друга, я не зміг собі уявити. Обережно спустившись на підлогу, я став обшукувати навколо, але даремно. Шукаючи шкарпетку, я переміщувався все далі й далі, але не знаходив її і лише наштовхувався на меблі. Коли я лягав спати, навколо було набагато менше меблів; тепер же кімната була цілком заповнена ними, особливо було багато стільців, які виявлялися повсюди. Чи не вселилися сюди ще дві сім'ї за цей час? Жодного з цих стільців я в темряві не бачив, зате безперестанно стукався об них головою.

Зрештою, я вирішив, що можу вийти і без однієї шкарпетки. Піднявшись я направився до дверей, як я гадав,— але раптом побачив своє тьмяне зображення в дзеркалі. Виявилося, що я заблудився і не маю ніякого уявлення про те, де знаходжуся. Коли б у кімнаті було одне дзеркало, воно допомогло б мені орієнтуватись, але їх було двоє, а це мене ще більше спантеличило.

Я хотів пробратися до дверей попід стіною, і почав діяти, але звалив картину. Вона була невелика але натворила багато шуму. Гарріс (сусід по кімнаті, який спав на іншому ліжку) не ворушився, але я відчував, що так я можу розбудити його, тому вирішив зробити по-іншому. Я хотів відшукати знову круглий стіл, біля якого був уже декілька разів, і від нього пробратися до свого ліжка, а там знайти графин з водою і, в крайнім разі, вгамувати нестерпну жадобу. Вирішив повзти на руках і на колінах; цей спосіб я вже випробував і більше довіряв йому. Нарешті, мені вдалося натрапити на стіл, тоді я підвівся і пішов з протягнутими вперед руками і розчепіреними пальцями. Відшукав стілець, потім стіну, другий стілець, диван, свою палицю, ще один диван. Це мене здивувало, бо я знав, що в кімнаті був лише один диван. Знову вдарився об стіл, потім наштовхнувся на новий ряд стільців. Тільки тоді прийшло мені в голову те, що давно повинно було прийти: стіл був круглий, а отже, не міг бути точкою відправлення при моїх блуканнях. Навмання пішов я в простір між стільцями й диваном, але знову опинився в невідомому місці і по дорозі звалив підсвічник з каміна, упустив лампу, а потім звінко полетів на підлогу графин. Цей шум розбудив Гарріса, який закричав: «Злодії! Граблять!»

На ноги піднявся весь дім. Зі свічками, ліхтарями прийшли гості, хазяїн, прислуга. Я озирнувся навколо. Виявилось, що я стою біля ліжка Гарріса. Лише один диван стояв біля стіни, а один стілець стояв так, що на нього можна було наткнутися, виявилось, що я крутився навколо, весь час натикаючись на нього. Зробивши підрахунки, я дізнався, що за півночі я зробив 47 міль».

Потім виступив учень Шаболтас.

«Останнє твердження Марка Твена перебільшено. За декілька годин ночі пройти 47 міль неможливо, але останнє все вірно. Цей епізод показує безпорадність людини, яка орієнтується в просторі по особистому відчуттю.

Проводились спеціальні досліди для вивчення схильності людей збиватися з прямого шляху на коловий. Виявилось, що у значної більшості людей і тварин м'язи правої сторони тіла розвинені неоднаково з м'язами лівої. Природньо, що пішохід, який весь час виносить праву ногу трохи далі, ніж ліву, не зможе триматись прямої лінії, якщо очі не допоможуть йому виправляти його шлях, він неминуче буде відхилятися вліво і рухатись по колу. Це геометрична необхідність. Радіус того кола, яке блукаючий описує, залежить від різниці довжини «правого» і «лівого» кроків. Цю залежність неважко встановити. Кількість кроків, зроблених на протязі одного кола, при довжині кроку 0,7 *м* дорівнює $\frac{2\pi R}{0,7}$, де R — радіус кола в метрах; з них «лівих» кроків $\frac{2\pi R}{2 \cdot 0,7}$ і стільки ж «правих». Помноживши це число на величину різниці x довжини кроків, одержимо різницю довжини тих концентричних кіл, які описані лівою і правою ногами, тобто

$$\frac{2\pi \cdot R \cdot x}{2 \cdot 0,7} = 2\pi \cdot 0,1, \text{ або } Rx = 0,14, \text{ де}$$

R і x в метрах. По цій формулі легко обчислити радіус кола, коли відома різниця кроків, і навпаки.

Неможливість тримати прямого шляху не складає для людини значних перешкод: компас, дороги, карти спасають його в більшості випадків від наслідків цього недоліку.

Геометрія допомагає людині використати для орієнтування зірки. Адже по Полярній зірці мандрівники пізнають, на якій широті вони знаходяться. Це найстародавніші математичні знання людини.

Наші дрейфуючі арктичні й антарктичні станції, а також інші полярні експедиції дізнавалися про своє пересування лише шляхом розв'язування геометричних і тригонометричних задач з участю Полярної зірки.

Звичайно, можна орієнтуватися і по інших зірках, але не розв'язуючи геометричної задачі на знаходження висоти даної зірки над горизонтом, неможливо дізнатися про широту місця.

В 1955 році газета «Правда» відмічала 10-ті роковини радянського антарктичного китобійного промислу. Китобої «Слави» першими пройшли по шляху прокладеному нашими

відважними співвітчизниками Фадеєм Белінсгаузеном і Михайлом Лазаревим. На арктичному континенті діє опорна наукова база Академії наук СРСР. Між полярниками Північного й Південного полюсів проводиться шаховний турнір по радіо. Нічого цього не було б, коли б не чудова наука математика, без якої жоден корабль не досяг би кінцевої мети свого мандрування, не була б споруджена жодна тунель, жодне світло не відкрило б секрету своєї відстані від землі, жодна вулиця в місті не була б прямолінійною, і навіть, не знайшлося б стовпа в тину, вкопаного строго вертикально.

Надається слово учениці X класу Шабаровій.

«Чи знаєте ви про одну цікаву професію на заводі — професію розмітчика?

Хто такий розмітчик: робітник, інженер? Він і робітник і інженер, він і геометр, і кресляр, і конструктор, і навіть... художник.

Цей геометр користується інструментами, які часто сам і створює. Він може поправити конструктора і дати пораду технологу, він «читає» креслярські рисунки деталей і сам їх будує. Робота розмітчика дуже відповідальна, його роботу ніхто не контролює. Якщо він помилився в розмітці, помилку цю ж допустять і робітники — одержиться брак.

Розмітчик — геометр, повинен сам зміркувати, як йому виконати розмітку швидко і точно, з чого доцільніше розпочати, як виготувати пристосування чи шаблон для прискорення і спрощення роботи.

Чим вищі математичні знання у розмітчика, тим значніші й помітніші його творчі успіхи.

Лауреат Сталінської премії токар-швидкісник М. Биков теж не без математики, зокрема геометрії, підвищив швидкість різання чавуна на 1690 *м/хв*, чим скоротив час на обробку деталі з 35 хвилин до 2½ хвилин.

Професор В. Л. Гончаров підкреслював, що для техніка — математика це є його мова: технік цією мовою і розмовляє, і пише і міркує.

Декілька років тому на полях України колгоспники-новатори почали застосовувати новий метод сівби колоскових культур. Замість звичайної рядкової сівби, вони застосували перехресну сівбу, а в останній час і перехресно-діагональну сівбу.

Одні й тіж колгоспи з площ, на яких був застосований перехресний метод сівби, зібрали озимої пшениці на 10—

12 центнерів з гектара більше, ніж з тих же площ, на яких застосовувалась звичайна сівба.

В успішному розв'язанні цього складного питання в значній мірі допомогла математика, зокрема геометрія.

Зараз ми вивчаємо лише основи математики, тобто елементарну математику, тому геометрія Лобачевського нам не зрозуміла. Отже, ми ще не доросли до неї, і завдання наше рости й набувати ще більш глибоких і міцних математичних знань. Сучасники Лобачевського зовсім не визнали його, а, навпаки, висміювали.

Із всіх учених-математиків лише Гаус зрозумів Лобачевського, але і він не наважився прилюдно висловити своє визнання.

Він обмежився тим, що за його пропозицією Лобачевський був вибраний членом-кореспондентом в Геттінгені, сам же Гаус прийнявся за вивчення російської мови з метою вивчення робіт Лобачевського в оригіналі.

Я, наприклад, дізнався, що геометрія Лобачевського не знаходиться в протиріччях з життям і що вона більш загальна, ніж геометрія Евкліда, яку ми вивчаємо в школі, що шкільна геометрія є лише частковим випадком геометрії Лобачевського.

В основі геометрії Евкліда лежить система аксіомістин, які приймаються без доведення. Серед аксіом Евкліда є «аксіома паралельності», яка полягає в тому, що «через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести в площині, що визначається цією точкою і прямою, не більше однієї прямої, яка не перетинає дану пряму». Ця пряма і називається прямою, паралельною даній.

М. І. Лобачевський взяв протилежне припущення: «через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести в площині, що визначається цією точкою і прямою, декілька прямих (дві), які не перетинають дану пряму».

Прийнявши це припущення за аксіому, Лобачевський довів цілий ланцюг нових теорем (наслідків). В своїх нових теоремах Лобачевський не виявив жодного протиріччя. Він створив зовсім нову геометрію, яка називається з того часу неевклідовою геометрією — геометрією Лобачевського. Лобачевський здійснив переворот у геометрії і філософії.

Обидві геометрії однаково логічно бездоганні, але відносяться вони до різних масштабів простору, до різних його властивостей. Геометрія Евкліда — геометрія земних про-

сторів і віддалей. Геометрія Лобачевського — геометрія гігантських міжпланетних і зникаючих малих атомних просторів.

Геометрія Лобачевського знайшла своє безпосереднє застосування в теорії означених інтегралів та в інших галузях математики. Геометрія Лобачевського дає можливість розв'язати питання про геометричну будову реального простору. Без відкриття Лобачевського не могла б розвиватися теорія відносності — одне з величезних досягнень сучасної фізики.

Виходячи з досліджень Лобачевського, вчені побудували теорію, яка дозволяє виконувати розрахунки процесів, що відбуваються в середині атома ядра.

В наш вік геометрія Лобачевського в різних питаннях математики і в розв'язуванні проблеми фізики має значення, яке важко переоцінити. Геометричні ідеї Лобачевського нині лежать в основі дуже багатьох нових теорій фізики та астрономії.

Тому і тут не можна погодитися з Романовою.

Виступ учня Кулешова.

Алгебра не менш дивовижна наука, ніж геометрія. Якраз вона відкриває способи швидких обчислень, за допомогою алгебри легко розв'язуються найскладніші задачі.

Наприклад, скільки буде

$$9883^2 + 2 \cdot 9883 \cdot 117 + 117^2?$$

Без алгебри довелося б робити важкі і довгі обчислення. Алгебра розв'язує ці питання так:

$$9883^2 + 2 \cdot 9883 \cdot 117 + 117^2 = (9883 + 117)^2 = 10000^2 = 10^8.$$

Або звернемося до зауваження Романової про те, що піднесення до степеня вище другого зустрічається дуже рідко, що 4, 6, 12 степені не зустрічаються на практиці.

Насправді в житті ми дуже часто зустрічаємося з піднесенням чисел не лише другого, але й вищих степенів. Згадаємо про численні випадки обчислення площ і об'ємів, де доводиться підносити числа до другого і третього степенів; сила всесвітнього тяжіння, електростатичне і магнітне взаємодіяння, світло, звук ослабляють пропорціонально квадратові віддалі, а періоди обертання планет навколо сонця відносяться між собою, як куби віддалей і т. д. Інже-

нер, виконуючи розрахунки на міцність, всюди має справу з четвертими степенями, а при інших обчисленнях, наприклад, діаметра паропровода, навіть із шостим степенем.

Досліджуючи силу, з якою текуча вода перекочує з собою каміння, гідротехнік зустрічається із залежністю також шостого степеня.

Відомий в гідрології «Закон Ері» твердить, що збільшення швидкості течії в n раз надає потокові здатності заносити предмети в n^6 раз важчі.

Як ілюстрацію цього закону уявіть собі три ріки; швидкість другої вдвоє більша від швидкості першої, а третьої — ще вдвоє більша. Інакше кажучи, швидкості їх відносяться, як 1 : 2 : 4. За законом Ері, вага каменів, які заносяться цими потоками, буде відноситись, як $1 : 2^6 : 2^{12} = 1 : 64 : 4096$. Ось чому, коли спокійна ріка заносить лише піщинки вагою $\frac{1}{4}$ *г*, то вдвоє швидша ріка може заносити камінці вагою до 16 *г*, а ще вдвоє швидша гірська річка (рис. 25) може вже перекочувати камені вагою у багато кілограмів.

Так у нашому прикладі, якщо швидкість течії в одній річці в чотири рази більша, ніж в другій, то швидка річка здатна перекочувати каміння в 4^6, тобто в 4096 раз важчі, ніж спокійна річка.

Таким чином, на практиці доводиться мати справу з піднесенням числа до 4, 6, 12 і навіть більшого степеня. Маса Сонця, наприклад, в тоннах дорівнює 2 000 000 000 000 000 000 000 000 000, такого числа і не прочитати... Лише нулів 27, а записується воно просто $2 \cdot 10^{27}$. Це, звичайно, набагато зручніше, ніж читати квінтильйони, сентильйони, які нічого не говорять.

Отже і тут твердження Романової безпідставні. Піднесення до високого степеня практична життєва математична дія, і взагалі алгебра важлива і невід'ємна галузь математичної науки, тільки, звичайно, не при одержанні здачі в крамниці, а в нашому великому житті, в будівництві, в астрономії, в техніці, в сільському господарстві, в медичній справі тощо.

Далі виступив учень 10 класу Шокдько, який сказав:

«Я зупинюсь на питанні «Застосування кібернетичних машин».

Під кібернетикою розуміють науковий напрям, який

Рис. 25.

виник в результаті математичного дослідження, процесів керування і зв'язку в автоматичних машинах і живих організмах. Слово «кібернетика» походить від грецького «кібернос» — рульовий, керманич.

Кібернетика виникла в перші роки після закінчення другої світової війни, головним чином у зв'язку з створен-

ням нових гігантів обчислювальної техніки — швидкодіючих електронних лічильних машин.

Наш час характеризується надзвичайно бурхливим розвитком техніки. Ще порівнюючи недавно XX століття називали віком електрики, а тепер ця назва здається далеко не повною. Хіба ми можемо забути про радіо, телебачення, авіацію, про відкриття атомної енергії і про створення швидкодіючих обчислювальних машин! Уже покладено початок завоюванню міжпланетного простору, здійснюється завітна мрія людства, наше століття назвуть «віком космічних польотів». Технічний прогрес вимагає розв'язання ряду невідкладних задач з дуже великим обсягом обчислювальної роботи. Час, необхідний для «ручного» розрахунку, може виявитися таким великим, що доведеться шукати грубо наближене розв'язання питання і відмовитись від більш точного розрахунку.

При виконанні деяких операцій потрібна дуже швидка реакція на зовнішні діяння, і людина не може вправитися з поставленим завданням. У цих випадках нам на допомогу приходить машина-обчислювач, машина-автомат.

Людство витратило триста років на подолання шляху від першої арифметичної машини, винайденої Паскалем у 1642 році, до перших швидкодіючих електронних лічильних машин, які з'явилися в 1943 році. Але те, що зроблено за останні десять — дванадцять років у справі розвитку машинної обчислювальної техніки, до деякої міри перевищує прогрес за попередні триста років! Кібернетичні машини проникли в найрізноманітніші галузі промисловості і науки, значення їх зростає з кожним роком.

Насамперед треба відзначити, що створення і застосування швидкодіючих обчислювальних електронних лічильних машин призвело до революції в обчислювальній техніці, дало можливість розв'язувати істотно нове коло задач.

В теорії імовірностей відомий метод Монте-Карло, який дозволяє завбачити результат серії дослідів, в кожному з яких поява різних подій має деяку імовірність. У фізиці цей метод застосовується в дослідженні дифузії нейтронів у речовині. Розрахунок можна провести лише за допомогою швидкодіючих обчислювальних машин. Цікаві задачі більш конкретної оцінки похибок виникають при розв'язанні великої кількості алгебраїчних рівнянь з великим числом

невідомих. У зв'язку з удосконаленням машин розвивається і «машинна математика». Обчислювальні машини застосовуються при створенні складних систем, коли винахідник неспроможний перебрати для спрощення конструкції всі можливі комбінації окремих елементів цієї системи. Така ж задача може з'явитись і в органічній хімії при «проектуванні» нових сполук, молекули яких складаються з великого числа атомів. Машина приходить на допомогу також у випадку необхідності одержати довідку про ту або іншу речовину. Не випадково тому американська асоціація хіміків поставила перед конструкторами завдання створити для цієї мети машину-статистика.

Перейдемо тепер до технічних питань. Вперше нові машини почали застосовуватись у військовій справі, в авіації і артилерії. Стрільба по реактивних літаках потребує дуже великої швидкості наводки гармати і може здійснюватись при допомозі керуючої машини.

Помилки, що виникають при цьому, не перевищують 10—15 *м* по дальності і 3—5 кутових мінут по напряму. Обчислювальні машини використовуються для бомбометання за складеною заздалегідь програмою, для керування снарядом, що летить, для регулювання посадки і зльоту реактивних літаків. Американська преса повідомляє про організацію противоповітряної оборони Нью-Йорка з використанням величезної обчислювальної машини, яка керує польотом літаків і їх вогнем, розробляє план «оборони», подає сигнали повітряної тривоги і відбою. Маневри однак показали, що досягнута автоматизація не є цілком задовільною. Машини з успіхом застосовуються для випробування льотних властивостей літаків нових типів, позбавляючи тим самим льотчика-випробовувача від риску.

Такі ж машини можуть керувати рухом ракети з урахуванням зміни вітру, температури та ін. Створені машини для моделювання польоту, які імітують несправність у літаку. Це дало можливість у більш короткий строк підготувати кваліфікованих льотчиків і зменшити необхідні для навчання затрати.

Кібернетичні машини можуть зашифровувати і розшифровувати повідомлення.

Обчислювальні машини вже протягом кількох років використовуються у бухгалтерських розрахунках, для розрахунку заробітної плати робітників і службовців з урахуванням їх виробітку, премій, податків і ін. Це дає

можливість використати цілий штат обчислювачів на іншій роботі.

Великі перспективи має застосування машин у довідково-бібліографічній роботі. Замість численних папок з справами можна користуватись магнітним барабаном, на який записують всі необхідні відомості. Оригінали ж документів можуть зберігатись в архіві. «Підшивку» нових відомостей можна здійснювати по телефону або телеграфу. При цьому час, потрібний для одержання необхідних даних, скоротиться.

Автомати дозволяють вибирати найбільш вигідний режим ведення плавки в доменній печі, регулюють кількість вуглецю, що витрачається, і керують іншими виробничими процесами. Автомати знайшли застосування і на нафтопереробних заводах.

Ряд виробничих процесів при виготовленні радіоприймачів, телевізорів, електронної апаратури, деталей механізмів може бути здійснений з допомогою машин. Нарешті, є проект машини, призначеної для створення нових собі-подібних машин (машина Неймана).

В одному з районів Нью-Йорка працює «робот-полісмен», що керує сигналізацією семафорів, заміняє 360 поліцейських і дає можливість скоротити час роз'їзду автомобілів у години пік на півгодини.

Досі застосовувались лише такі механізми, які давали можливість автоматизувати будь-який певний тип роботи. При зміні завдання доводилось змінювати і самий пристрій. Якщо ж роботою верстата «керує» обчислювальна машина, то для зміни характеру роботи верстата треба лише змінити програму, що здійснюється простою заміною однієї стрічки другою. Обмін досвідом між різними підприємствами також можна здійснити з допомогою магнітних стрічок.

Кібернетичні машини застосовуються в харчовій промисловості при виготовленні продуктів і розфасуванні товарів; вони використовуються в медицині для діагностики захворювань, в геології, геодезії. Радянські інженери працюють над створенням обчислювальної машини, яка керуватиме рухом локомотива, підбираючи найбільш вигідний режим швидкостей в залежності від профілю шляху. Вже побудовані металообробні верстати, керовані обчислювальною машиною.

Одна з кращих англійських обчислювальних машин використовується для потреб лондонських кафе і ресторанів. До її завдання входить складання меню на наступні дні з урахуванням запитів відвідувачів. З своїм завданням вона справляється протягом двох годин, а на решту часу підприємці здають її «внайми» для наукових установ. Американська компанія «Белл» використовує машини для підрахунку вартості телефонних розмов. Число таких прикладів можна було б збільшити, але і сказаного досить для того, щоб зрозуміти, яку роль починають відігравати ці машини в житті.

Треба, нарешті, спинитись на можливості перекладання з однієї мови на іншу, на машинах, які грають в шахи, шашки і інші ігри. Перші переклади з російської мови на англійську були здійснені в 1954 році. Радянська обчислювальна машина БЭСМ успішно перекладала з англійської мови на російську; тепер розглядається питання про переклад і з інших мов.

Універсальну обчислювальну машину можна «навчити» грати в шахи, шашки і інші ігри за допомогою складання відповідної програми.

Так, в останніх дослідах одна з американських машин показала високий клас гри, зігравши внічию з гросмейстером Решевським. Машини можуть розв'язувати також і логічні задачі.

Видатний радянський вчений С. І. Вавілов писав: «Ніколи ще людство не досягало такої широчини і могутності в «машинній математиці», як за останні роки. Нові прилади на механічних, електричних і навіть електронно-вакуумних принципах дають змогу розв'язувати найскладніші задачі з математики, які висувають техніка і різні науки про природу. Може трохи перебільшуючи, можна сказати, що ми наближаємось до того часу, коли на долю математики залишиться тільки складання рівнянь; розв'язувати ж ці рівняння будуть машини».

Прискорюючи рух до комунізму, полегшуючи важку фізичну працю на заводах, будовах, колгоспних ланах, працюють тисячі різних механізмів. Радянськими конструкторами-математиками створені машини, які полегшують і розумову працю.

Лічильні машини допомагають розв'язувати нові завдання, що постають перед наукою і технікою.

Все це немислимо без математики.

Далі надали слово учневі X класу Гусєву, який відмітив: «Я в своєму виступі торкнуся питання «Математика і виробництво», зупиняючись теж на проблемі зв'язку математики з життям.

Протягом останнього часу стало особливо помітно, що при вивченні основ наук, зокрема математики, велика увага приділяється практичним задачам. Наприклад, в грудні місяці ми всім класом були на екскурсії на Байдаківському вуглерозрізі; в кар'єрі ми зустріли роторні та багатоковшові екскаватори. Ми поцікавилися, яка продуктивність кожного з них, але для цього нам довелося виконати всі необхідні вимірювання і обчислення. (Учень на дошці виконує всі необхідні розрахунки, зв'язані з обчисленням продуктивності екскаваторів).

Ми розв'язали й інше питання, яке цікавило нас, а саме: яку кількість вугілля вивозить електропоїзд за один раз. Для цього ми зняли розміри однієї вагонетки. Визначили її об'єм, помножили на кількість вагонеток і одержали об'єм вугілля всього електропоїзда. Потім об'єм, що його займає вугілля, помножили на питому вагу вугілля і одержали продуктивність електропоїзда.

Ми були й на центральній електростанції. Ця екскурсія передбачалась в основному з фізики та хімії, але ми одержали завдання з математики — знайти об'єм бака, що має форму циліндра. Ми виконали необхідні вимірювання бака хімводоочистки і обчислили його об'єм.

На брикетній фабриці ми виміряли розміри сушильного барабана, об'єм цистерн для пального, форма яких складається з циліндра та з двох зрізаних конусів і ін.

До практичних задач відносяться вимірювальні роботи на місцевості. Нам було доручено визначити висоту 3-х і 4-х поверхів нашої школи. Ця робота виявилась дуже цікавою для нас, бо ми навчилися користуватися рулеткою, теодолітом, за допомогою якого точно й легко знаходити кути в вертикальній та горизонтальній площинах, усвідомили застосування логарифмічної лінійки при обчисленнях тощо.

Учні нашого класу багато працюють над виготовленням моделей, розгорток циліндрів, конусів, пірамід та ін. Вдалі моделі виготовили Паршуков (рух двох суден з різними швидкостями), Гавриленко (розгортка циліндра, яка автоматично може приймати форму циліндра) і інші. (Всі моделі демонструються).

Словом, не доїхали ми тоді вчасно, початок у мого приятеля був невдалий. А це трапилось через незнання ним математики і, звичайно, шоферові знати треба не тільки пропорції. Економія пального, наприклад, визначається в процентах, а при ремонті машини і геометрія потрібна.

«Як бачите, шоферу теж треба вчити цю науку. Так я й сказав тому хлопцеві, який думає шофером стати».

Далі надається слово учневі Дацузі, який розповідає про життя Архімеда, що було овіяне легендарною славою.

Учень розповів, що Архімед народився біля 287 років до н. е. в Сіцілії і в 212 році, на 75 році свого життя, загинув при штурмі римлянами міста Сіракуз.

Учень пропонує учасникам вечора декілька легенд про Архімеда.

Легенда перша. Ціцерон так описує смерть Архімеда. Під час штурму міста Сіракуз Архімед сидів на площі і посохом креслив геометричні фігури на землі. Поринувши в споглядання своїх креслень, розв'язуючи якусь глибокодумну задачу, він не помітив, як в обложене місто ввірвалися ворожі війська.

Архімед був убитий римським воїном, якого він благав лише про одне: «Не чіпай креслень!»

Легенда друга. Сіракузький цар Гієрон замовив золотих справ майстру корону і дав йому певну кількість золота. Майстер виконав замовлення і при цьому присвоїв собі частину царського золота, замінивши його рівним по вазі сріблом. Цар запідозрив майстра в нечесності і звернувся до Архімеда з проханням визначити вагу вкраденого золота.

Ключ до розв'язання поставленої задачі Архімед знайшов, сидячи в ванні, і так цьому зрадів, що вибіг на вулицю зовсім голим з криком: «Евріка! Евріка!» (Я знайшов! Я знайшов!). Виявляється, що сидячи в ванні, Архімед відкрив відомий закон про занурення твердих тіл в рідину, який носить назву «Закону Архімеда».

Легенда третя. Архімед на протязі двох років при допомозі своїх машин з успіхом захищав Сіракузи від могутньої римської армії, якою командував Марк Клавдій Марцелл, один з найбільш видатних воєначальників того часу. Ось як розповідає Плутарх (46—126 рр. н. е.) про взяття міста Сіракуз римлянами. «Марцелл цілком покладався на численність і блиск своєї зброї і на

власну свою славу. Але все це виявилось неістотним проти Архімеда і його машин. . .

Архімед був родичем померлого царя Гієрона. В свій час Архімед писав Гієрону, що невеликою силою можливо привести в рух яку завгодно велику вагу; більше того, цілком покладаючись на переконливість своїх доказів, він навіть твердив, що був би спроможний привести в рух саму Землю, коли б існувала інша, на яку він міг би стати. («Дай мені, де стати, і я зрушу Землю»).

Гієрон був цим здивований і запропонував Архімеду показати на ділі, як можливо велику вагу привести в рух малою силою. Архімед здійснив це над вантажним трищогловим судном, яке, здавалось, могло б витягнути на берег лише велике число людей. Архімед велів посадити на судно велику кількість людей і навантажити звичайним великим вантажем. Розташувавшись на деякій віддалі на березі, він без будь-якого напруження, зовсім спокійно натискуючи власною рукою на кінець поліспаста, легко, не порушуючи рівноваги, присунув судно. Гієрон був цим надзвичайно вражений і, переконавшись у високому значенні цього мистецтва, умовив Архімеда спорудити машини як для оборони, так і для нападу при будь-якій облозі...

Коли римляни почали наступ з суші і з моря, сіракузяни вважали неможливим протистояти такій великій силі і воєнній могутності. Тоді Архімед привів в дію свої машини і споруди різноманітного роду, на сухопутні війська посипались каміння величезного розміру і ваги, з шумом і неймовірною швидкістю.

Цілі підрозділи військ валились на землю, і їх ряди прийшли в повне безладдя. В той же час і на судна валилися з кріпості важкі балки, які були викривлені у вигляді рогів, одні з них міцними ударами занурювали судна вглиб моря, інші гаками у формі журавлиних дзьобів, немов залізними руками, піднімали кораблі високо в повітря, а потім опускали кормою в воду. В той же час інші машини кидали судна на скелі біля міста, і їх матроси піддавались страшенному знищенню... Бачачи це, Марцелл припинив бій і напад і залишив дальшу облогу діянню часу».

Далі, за словами Палібія, який жив приблизно через 30 років після смерті Архімеда, Плутарх розповідає таке: «Коли кораблі Марцелла наблизились на від-

даль польоту стріли, то старий (Архімед) звелів наблизити зроблене ним шестигранне дзеркало. На певній віддалі від цього дзеркала він помістив інші трохи менші дзеркала, такого ж виду. Ці дзеркала оберталися на своїх шарнірах з допомогою квадратних пластинок. Потім він встановлював своє дзеркало серед променів сонця влітку і взимку. Промені, відбиті від цих дзеркал, викликали страшенну пожежу на кораблях, які були перетворені в попіл на віддалі, рівній польоту стріли».

Ця розповідь Плутарха довгий час вважалася байкою, поки відомий вчений Бюффон в 1777 році, у квітні місяці, з допомогою 168 дзеркал запалив дерево і розплавив свинець на віддалі 40 метрів.

В своїх математичних працях Архімед дотепно розв'язував задачі на обчислення довжин кривих, площ і об'ємів. Всі його відкриття в математиці знаходили широке практичне застосування в житті.

Наведені приклади показують, яке велике значення має математика в житті людства.

(ЛІТЕРАТУРА

В. Ф. Каган, Архімед. Короткий нарис про життя і творчість, 1951.
М. Е. Ващенко-Захарченко, Історія математики, т. 1, Київ, 1883.)

Потім виступає учениця IX класу Лещинська, яка розповідає про цифри Індії і Китаю.

Вона зазначила: «Відомо, як інколи цифри і числа зближують народи різних націй.

Ми вже півтора року ведемо переписку з китайськими друзями з міста Дзінь-Чжоу, обмінюємось з ними подарунками і ін. На одержаних з Китаю подарунках (ілюструються подарунки) написані цифри й числа. Ось, наприклад, портрет Мао Цзе-дуна, вишитий шовком, або китайський вид — на тканині. Ми одержали від китайських друзів багато книг на китайській мові; прочитати їх, ми звичайно, не спроможні, але цифри і числа ми розібрали і дуже раді цьому.

Цифри китайців — хитромудрі ієрогліфи. Вони дуже стародавні, їм більше 4600 років. За пропозицією Мао Цзе-дуна в Китаї проведена реформа писемності і цифри

після неї значно спростились. Наші цифри простіші. Це так звані арабські цифри. Але араби поширили ці цифри тільки в Європі. Своїм походженням вони зобов'язані Індії. Індуси, як і китайці, народ з високою культурою. Вони скоротили кількість цифр і довели їх до десяти, включаючи й нуль.

Індійські цифри вживаються в нас з 1611 року. До цього в Росії числа виражались буквами слав'янського алфавіту. Петро I узаконив індійські цифри і ввів їх у вжиток. Вони витіснили всі інші і вживаються й до цього часу. Тепер ми знаємо китайські й індійські цифри (ілюструються таблиці цих цифр). Але в них у школах класи нумеруються інакше, ніж у нас. Наприклад у них 2«5» кл. відповідає нашому десятому класу. Це ми встановили з того, що учень, який вчився в минулому році в 2«5» кл., зараз навчається в політехнічному інституті в м. Дальному.

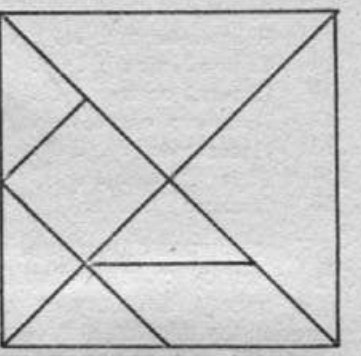

Рис. 26

Таким чином, відповідаючи на заперечення Романової, можна сказати, що математика має величезне значення і в побуті. Числа й дати зблизили нас і китайців, дружба наша стала ще міцнішою».

В кінці учениця запропонувала китайську гру, в основі якої лежить китайська головоломка, описана М. І. Коченовським у статті «Про саморобні і наочні посібники з математики» («Математика в школі», 1954, № 6, стор. 9—10). Ця гра вважається більш стародавньою ніж шахи, вона виникла чотири тисячі років тому.

Гра полягає в тому, що із семи частин квадрату, розрізаного так, як це показано на рисунку 26, протягом 10 хвилин учні кожного класу (не обов'язково всі) повинні були скласти оголошену ученицею ту чи іншу силуетну фігурку, причому треба дотримуватись правила: в склад силуета повинні входити всі сім кусочків, і ці кусочки не повинні перекриватись навіть частково.

Перемагає той клас (учень), який набере найбільше очок.

Результати оформляються слідуючою таблицею:

№№ пп	Силуети	Класи				
		8а	8б	9	10а	10б
1	Півень					
2	Курка					
3	Молоток					
4	Свічка					
5	Страус					
6	Кенгуру					
7	Вершник					
8	Будинок					
9	Чоловік-бігун					
10	Сидячий кіт					
11	Сидячий заєць					
12	Людина з прапором . . .					
13	Наковальня					
14	Риба					
15	Лисиця					

Клас виграє одне очко, якщо за вказаний час хто-небудь з класу складе потрібну силуетну фігурку.

В цьому випадку в таблиці проти даної фігурки в стовпчику відповідного класу ставилась одиниця. Якщо жоден з учнів цього класу за 10 хв. не зумів скласти потрібної силуетної фігури, то у відповідній графі і стовпчику ставився нуль.

Максимальна кількість очок, яку міг набрати клас (учень) 15 (відповідає кількості силуетних фігур).

Гра проходила живо і цікаво, а головне з великою користю для учасників, розвиваючи в них мислення й конструкторські здібності. (Набрана окремими учнями відповідна кількість очок враховувалась при проведенні вікторини).

Далі послідував виступ учня X класу Калішевича на тему: «Математика й музика».

Виступаючий зауважив: «Я хочу розповісти про застосування математики в музиці.

Дехто, можливо, вважає, що між музикою й математикою нема нічого спільного. Насправді ж математика й музика тісно пов'язані між собою, і музикантам досить часто доводиться стикатися з математикою.

В літературі зустрічається розповідь відомого професора фізики А. Ейхенвальда, де він зазначає: «Мій товариш по гімназії захоплювався грою на фортепіано, але не любив математики. Він навіть з іронією вказував на те, що музика й математика нічого спільного між собою не мають.

«Правда, Піфагор знайшов якісь співвідношення між звуковими коливаннями,— але якраз піфагорова гама для нашої музики і виявилась непридатною».

Уявіть собі, як неприємно був вражений мій товариш, коли я довів йому, що, граючи на клавишах рояля, він грає, власне кажучи, на логарифмах....

І справді, так звані «ступені» хроматичної гами не розташовані на однакових віддалях ні по відношенню до числа коливань, ні по відношенню до довжин хвиль відповідних звуків, а уявляють собою логарифми цих величин. Тільки основа цих логарифмів дорівнює 2, а не 10.

Коли музикант працює над настроюванням інструменту, він насправді підтягує струни так, щоб число їх коливань дорівнювало логарифму $\sqrt[12]{2}$.

Існує навіть формула числа коливань будь-якого тона:

$$\log_2 N = m + \frac{P}{12}.$$

(Всі ноти хроматичної гами рояля позначають номерами P).

Звідси видно, що коливання рояля або акордеона уявляють собою логарифм числа коливань відповідних звуків. Звичайно можна грати на інструменті без знання цієї математичної залежності, але хороший музикант — настроювач мусить знати, що число звуків його рояля, чи акордеона забезпечує математика.

Наведемо ще один приклад.

Під час будівництва Московського метро в одному із гуртожитків метробудівників розгорнулася дискусія на музикальну тему. Дівчина, яка знала математику, твердила, що композитори надзвичайно обмежені в своїх можливостях. Число звуків, наприклад, рояля, обмежене, і чим далі, тим число комбінацій, які можна створити з цих звуків, ставатиме все менше й менше. Отже, настане час, коли не почуєш жодної нової мелодії, всі мелодії будуть повторюватися і спостерігатиметься цілковитий плагіат.

Математика вносить ясність в цю дискусію і доводить, що основні мелодії не вичерпні. Боязкість музикальної кризи виявляється даремною, якщо підрахувати число

можливих комбінацій, наприклад, із 36 звуків середніх 3 октав. Основну мелодію завжди можна виконати одним пальцем на 36 клавишах трьох середніх октав. Наприклад: учень на акордеоні виконує мелодію російської народної пісні «Во поле березонька стояла», де із 36 нот виявляється різних комбінацій 36^{32}.

Математичні розрахунки дають таку відповідь: $36^{32} \approx \approx 10^{50}$, або десять з п'ятдесяттю нулями, тобто

100000000000000000000000000000000000000000000000000.

Такого числа комбінацій вистачить надовго. Коли б навіть людство перетворилося в музикантів і кожен щохвилини творив нову мелодію, то нових мелодій вистачило б на трильйон років.

Як бачите, на ваш вік вистачить самих найрізноманітніших мелодій, і можна не турбуватися відносно їх повторення та переймання. Для підтвердження цього я виконаю декілька мелодій, бо всі мелодії неможливо проілюструвати.

(І мелодія — старовинна російська пісня Варламова «Красный сарафан».

(ІІ мелодія — найновіша «Песенка о хорошем настроении» з кінофільму «Карнавальна ніч», муз. Лепіна.

(Можуть бути виконані й інші відомі учням мелодії).

В кінці хочу навести цікаве твердження Уайтхеда («Наука і сучасний світ»): «Історія людської думки, що ігнорує в ній роль математики, є постановка на сцені «Гамлета» якщо не без самого Гамлета, то щонайменше без Офелії».

Після всіх знову виступила учениця Романова, яка зазначила:

«Друзі! Я звичайно згодна з тими запереченнями і прикладами, які на цьому цікавому вечорі наводилися з метою доведення того незаперечного факту, що математика тісно зв'язана з життям і знаходить своє широке застосування всюди: в техніці, сільському господарстві, побуті, музиці і ін.

Сама я завжди вірила і вірю у величезну силу математики, але я знала, що висловлені мною сумніви існували серед багатьох школярів і, можливо, навіть серед присутніх.

Корисно було розвіяти ці сумніви.

Крім того, хотілося оживити цей вечір і довести, що математика досить цікава наука, а не нудна, як часто називають її.

Я, дорогі друзі, за глибокі і міцні знання з математики, за найсумліннішу підготовку до великого життя, за те, щоб ми навчаючись, чи працюючи в будь-якій галузі змогли б принести користь нашій любимій Батьківщині».

Староста математичного гуртка оголошує, що учнями Рудь, Романко, Урицьким і Кулешовим буде виконана інсценіровка за легендою стародавнього Риму «Вознаграждение полководца».

Ведучий. Полководець Теренцій за наказом імператора учинив побідоносний похід і з трофеями повернувся до Риму. Прибувши в столицю, прохав допустити його до імператора, його допустили.

Імператор. Сердечно дякую тобі за військові послуги імперії і обіцяю в нагороду дати високу посаду в сенаті.

Ведучий. Але Теренцію потрібно було інше. Він заперечив.

Теренцій. Багато перемог одержав я, щоб підняти твою могутність, государ, і оточити ім'я твоє славою. Я не боявся смерті, і будь у мене не одне життя, а багато, я всі їх приніс би тобі в жертву. Але я втомився воювати; пройшла молодість, кров повільніше біжить в моїх жилах. Наступила пора відпочити в будинку моїх предків і насолодитися радощами домашнього життя.

Імператор. Чого бажав би ти від мене, Теренцій?

Теренцій. За довгі роки військового життя, щодня закривавлюючи меч свій кров'ю, я не встиг влаштувати собі грошового благополуччя. Я бідний, государ...

Імператор. Продовжуй, хоробрий Теренцій.

Теренцій. Якщо хочеш подарувати нагороду скромному слузі твоєму, то нехай щедрість твоя допоможе мені дожити вік свій мирно в достатку біля домашнього вогнища. Я не шукаю почестей і високого чину у всемогутньому сенаті. Я бажав би віддалитися від власті і від життя суспільного, щоб спокійно відпочити. Государ, дай мені грошей для забезпечення решти мого життя.

Ведучий. Імператор — говорить легенда — не відзначався широкою щедрістю. Він любив збирати гроші для себе і скупо витрачав їх на інших.

Прохання полководця примусило його замислитись.

Імператор. Яку ж суму, Теренцій, вважав би для себе достатньою?

Теренцій. Мільйон дінаріїв, государ.

Імператор. *(Довго думає, а полководець чекає).* Доблесний Теренцій! Ти великий воїн, і славні подвиги твої заслужили щедрої нагороди. Я дам тобі багатство. Завтра опівдні ти почуєш тут моє рішення.

(Теренцій, поклонившись, виходить).

Ведучий. На слідуючий день в призначений час полководець з'явився до палацу імператора.

Імператор. Привіт тобі, хоробрий Теренцію.

Теренцій. *(Низько кланяючись).* Я прийшов, государ, щоб вислухати твоє рішення. Ти обіцяв винагородити мене.

Імператор. Не хочу, щоб такий благородний войовник, як ти, одержав за свої подвиги мізерну нагороду. Вислухай же мене. В моїй скарбниці лежить 5 мільйонів мідних брасів[1]. Ти ввійдеш у скарбницю, візьмеш одну монету в руки, повернешся сюди і покладеш її до моїх ніг. На другий день знову підеш у скарбницю, візьмеш монету, яка дорівнює 2 брасам і покладеш тут поруч з першою. В третій день принесеш монету, яка коштує 4 браса, на четвертий — ту, яка коштує 8 брасів, в п'ятий — 16 і так далі, весь час подвоюючи вартість монети. Я накажу щоденно виготовляти для тебе монети належної вартості. І поки вистачить у тебе сил піднімати монети, будеш ти виносити їх із моєї скарбниці. Ніхто не має права допомагати тобі, ти повинен користуватися лише особистими силами. І коли помітиш, що не спроможний більше підняти монету, зупинишся. Всі монети, які вдалось тобі винести, залишаться твоїми і стануть тобі нагородою.

Теренцій. Я задоволений твоєю милостинею, государ. По-справжньому щедра твоя нагорода.

Ведучий. Розпочались щоденні відвідування Теренцієм державної скарбниці, яка була поруч з прийомною зала імператора, і перші переміщення з монетами не коштували Теренцію ніяких зусиль.

Теренцій вносить у прийомну зала, де сидить сам імператор, першу монету, 21 *мм* в діаметрі і 5 *г* вагою. (Входить Теренцій з монетою, кладе її біля імператора і виходить). Потім вносить другу, третю, четверту, п'яту, шосту і сьому монети, остання з яких була діаметром 8,5 *см* і вагою 320 *г*.

Теренцій вносить восьму монету.

---

[1] Дрібна монета, п'ята частина дінарія.

Ведучий. Восьма монета була в діаметрі 10,5 *см* і вагою 640 *г*. *Теренцій вносить дев'яту монету.*

Ведучий. Вона була в діаметрі 13 *см* і вагою $1\frac{1}{4}$ *кг*.

На дванадцятий день Теренцій вносить монету в діаметрі 27 *см* і вагою $10\frac{1}{4}$ *кг* (*Теренцій вносить цю монету*).

На тринадцятий день Теренцій приніс монету діаметром 34 *см* і вагою $20\frac{1}{2}$ *кг*; на чотирнадцятий — діаметром 42 *см* і вагою 41 *кг* (*Теренцій вносить цю монету*).

Рис. 27.

Рис. 28.

Рис. 29.

Імператор.— Чи не заморився, мій хоробрий Теренцію?

Теренцій.— Ні, государ мій. (*Теренцій витирає піт на лобі і виходить*).

Ведучий. Наступив п'ятнадцятий день. Теренцій повільно вносить монету в діаметрі 53 *см* і вагою 80 *кг*.

І на шістнадцятий день Теренцій вже на спині вносить монету діаметром 67 *см* і вагою 164 *кг* (*імператор посмі-*

хається), на сімнадцятий день Теренцій вкотив монету в діаметрі 84 *см* і вагою 328 *кг*, а на вісімнадцятий день Теренцій повільно з великим зусиллям вкочує монету в діаметрі більше метра і вагою 655 *кг*.

Теренцій. Не можу більше... Досить.

Імператор. Хоробрий Теренцій, піди до казначея, нехай він підрахує скільки всього брасів було тобою винесено із скарбниці *(Теренцій виходить)*.

Рис. 30.

Рис. 31.

Рис. 32.

Через деякий час входять Теренцій і казначей.

Казначей. Государ, завдяки твоїй щедрості хоробрий войовник Теренцій одержав нагороду 262143 браса.

Ведучий. Таким чином, скупий імператор видав полководцю біля 20-ї частини тої суми, яку просив Теренцій.

Завіса закривається.

Протягом вечора працювала математична лоторея і кімната математичних розваг. Лотерея викликала великий інтерес у учасників вечора.

Велике пожвавлення було в кімнатах, де проводились атракціони («Метание в цель», «Игра в клетки», «Мост»)[1]

[1] Поляк П. Д., Цікаві задачі. «Учпедгиз», 1948.

та математичні розваги. На двох класних дошках були розміщені: кросворд «Геометрія» і задача «Лабіринт», за розв'язки яких учні одержували премії.

Рис. 33.

Рис. 34.

Рис. 35.

В іншій кімнаті були організовані настольні ігри, наприклад: «Тише едешь — дальше будешь», «Гра в монети», «Колективна гра «Гоп», «Математичне лото», «Цирк», «Програє той, хто бере останній», «Хто перший скаже сто», атракціон «Гонки до 1000» й ін.

За окремим столом з підставкою, як в кіосках, сиділи

два учні, які «продавали» математичні загадки, фокуси, жарти, задачі, шаради і т. д.

Задачі в кіосках були, примірно, такі:

1. Підрахуй суму різниць за 5 секунд.

$$18 - 12 =; \quad 25 - 18 =; \quad 36 - 25 =; \quad 42 - 36;$$
$$68 - 42 =; \quad 73 - 68 =; \quad 97 - 73 =.$$

2. На чверті кола, радіус якого дорівнює 4 *см*, візьмемо довільну точку *A*. Відмічаємо на рівні точки *A*, точку *B*, а прямовисно під *A* — точку *C*. Розрахувати з точністю до однієї сотої сантиметра віддаль *BC* (10 сек.)

3. Розділити число 12 на дві різні частини, щоб одна з них склала 7 (2 хв.).

4. Які числа при перевертанні збільшуються в півтора рази (2 хв.).

5. Які числа не змінюються, якщо їх читати перевернутими?

6. Що дорожче — кілограм гривеників, чи півкілограма двогривеників? (5 *сек.*)

7. Написати число 100 чотирма п'ятірками, потім шестірками (10 *сек.*)

8. Хлопчик купив у крамниці 6 пер, декілька зошитів по 30 коп. і 3 олівці. Продавець виписав чек на 2 крб. 20 коп.— Ви помилилися,— сказав йому хлопчик, як тільки глянув на чек. Продавець здивувався, як хлопчик, не підрахувавши грошей, помітив помилку. Перевірка показала, що хлопчик має рацію. Як він додумався?

9. Відшукати помилку в розв'язанні рівняння:
$8x - 20 = 10x - 25$; $4(2x - 5) = 5(2x - 5)$; $4 = 5$? (2 *сек*).

Кожен одержував білет і олівець. Якщо на білеті вказано час відповіді, то відповідати треба було тут же і усно. В окремих білетах не було вказано часу на відповідь, тоді відповіді писали на звороті аркуша паперу з необхідним поясненням до розв'язку.

Учні, які давали правильні відповіді, преміювались.

В заключенні вечора відбулася математична вікторина, яка складалася, примірно, з таких задач.

№ 1.

Дріб $\frac{26}{65}$ не можна скорочувати закресленням цифри 6. Але результат виявився правильним. Придумати ще приклад і пояснити причину одержання правильного результату при неправильній дії. (1 бал).

№ 2.

Між цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 розташувати знак «+» так, щоб сума дорівнювала 100 (1 бал).

№ 3.

Написати найбільші числа із цифр

1. 1. 1; 2. 2. 2; 5. 5. 5; (1 бал).

№ 4.

Написати число 1000 вісьмома восьмірками (1 бал).

№ 5.

У скільки разів східці на 4-й поверх довші східців на 2-й поверх (1 бал).

№ 6.

Який рік, цифри якого будучи перевернутими, читається так само як і в прямому написанні? (1 бал).

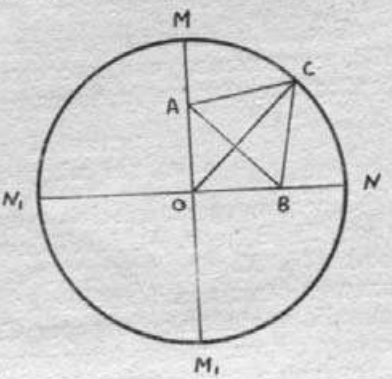

Рис. 36.

№ 7.

Написати 1957 римськими цифрами (1 бал).

№ 8.

Практична задача.

Із 36 болванок можна виточити 36 деталей, але із стружок кожних 6 деталей можна відлити ще по одній болванці. Скільки деталей можна виточити із 36 болванок? (1 бал).

№ 9.

Із точки, розташованої поза площиною M, проведені $AS \perp M$ і похилі BS і CS. $SA = h$, $SB = a$, $SC = b$. Знайти віддаль BC між основами похилих (3 бали).

№ 10.

$\smile MC = \smile NC$, $MM_1 \perp NN_1$, $AB = 5$ *см*. Знайти D (діаметр) (рис. 36) (1 бал)

№ 11.

Чи можна накреслити довільну криву так, щоб всі

її точки були рівновіддалені від однієї? (1 бал).

В заключенні вечора хор 10 «А» класу виконав «Марш ентузіастів» (музика Дунаєвського, з кінофільму «Ясний шлях»), що закінчувався натхненними, патріотичними словами:

«Нам нет преград на море и на суше,
Нам не страшны ни льды, ни облака!
Пламя души своей, знамя страны своей
Мы пронесем через миры и века!»

В кінці керівник гуртка оголосив результати вікторини, її переможцям вручив нагороди і побажав учням ще глибше, серйозніше й ще наполегливіше вивчати математику.

Математичний вечір на тему «видатні жінки-математики».

Серед портретів діячів математичної науки П. Л. Чебишева, Л. Ейлера, М. І. Лобачевського, М. В. Остроградського, І. М. Виноградова, О. М. Крилова, які прикрашають математичний кабінет середньої школи № 2 м. Олександрії, виділяється портрет С. В. Ковалевської, відомої всьому світові жінки-математика, яка постійно привертає увагу учнів, особливо здібних дівчат, які люблять математику і вважають її основою своєї майбутньої спеціальності.

Члени математичного гуртка 8—10 класів середньої школи № 2 м. Олександрії на січневому розширеному занятті вирішили в день 8 Березня провести математичний вечір на тему «Видатні жінки-математики».

Математичному вечорові передувала математична олімпіада, яка дала змогу виявити найбільш здібних і математично розвинених учнів. Вона проведена була в січні — лютому 1958 р. окремо для восьмих і окремо для дев'ятих та десятих класів. В жюрі олімпіади ввійшли лише вчителі-математики з тим, щоб не позбавити жодного учня права на участь в олімпіаді. Напередодні олімпіади було вивішено оголошення, в якому повідомлялася мета олімпіади і умови участі в ній.

ОГОЛОШЕННЯ

Учком і математичний гурток десятих класів оголошує

МАТЕМАТИЧНУ ОЛІМПІАДУ

8-х, 9-х і 10-х класів

УМОВИ

1. До участі в олімпіаді запрошуються учні 8, 9 і 10 класів.
2. Олімпіада проводиться за трьома турами:
   I тур — з 27 січня до 1 лютого 1958 р. Переможці I туру допускаються до II туру. II тур — проводиться з 6 до 12 лютого. Переможці II туру допускаються до III туру. III тур — проводиться з 17 до 22 лютого. Підсумки III туру будуть оголошені на математичному вечорі 8 березня.
3. Переможцям олімпіади будуть вручені премії і грамоти. Встановлюються: одна перша премія, дві других і три треті премії.
4. Для восьмикласників пропонуються задачі за восьмий клас, для дев'ятикласників — за восьмий і дев'ятий клас, для десятикласників — за 8, 9 і 10 класи.
5. Задачі I туру будуть оголошені 27 січня.

ГОТУЙТЕСЬ ДО ОЛІМПІАДИ!

Повторіть теми: дії над радикалами, подібність фігур, прогресії, степені з дробовими і від'ємними показниками, площі фігур.

За кілька днів до початку олімпіади вивішуються матеріали I туру.

РОЗПОЧИНАЄМО ПЕРШИЙ ТУР ОЛІМПІАДИ.

ЗАДАЧІ ДЛЯ 8 КЛАСУ.

АЛГЕБРА

Задача № 1. Обчислити: $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$

Задача № 2.

Розв'язати рівняння:

$$\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{2x-x^2}+\frac{x-4}{x^2+2x}=0$$

Задача № 3. Із двох двійок і знаків, що вживаються в математиці, скласти числа, які були б:
а) більше нуля, але менші одиниці;
б) більше двох, але менше трьох;
в) більше чотирьох, але менше п'яти.

ГЕОМЕТРІЯ.

Задача № 4. Чи може вписаний в коло многокутник мати:
а) рівні сторони, але не рівні кути?
б) рівні кути, але не рівні сторони?

Задача № 5. Чи подібні зовнішні і внутрішні фігури (рис. 37 і 38):
а) в креслярському трикутнику?
б) в рамі для картини?

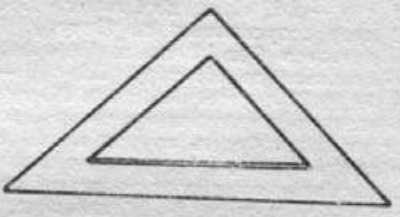

Рис. 37.

Задача № 6. Сформулюйте ознаки подібності:
а) рівнобедрених трикутників;

Рис. 38.

б) рівносторонніх трикутників;
в) чи можна назвати рівні трикутники подібними?

Задачі для 9—10 класів.

№№ 1—6. Розв'язати 6 задач 8-го класу.

Задача № 7. П'ятий член арифметичної прогресії, що дорівнює 10, є її середнім членом. Відшукати суму всіх членів прогресії.

Задача № 8. Обчислити:

$$5^{0.2-\sqrt[-3]{146-\frac{\sqrt[3]{21}}{21^{-1/3}}}}.$$

Задача № 9. Квадрат рівновеликий кругу. Що більше: довжина кола чи периметр квадрата.

УВАГА!

1. Розв'язки всіх, або частини задач виконати на подвійному аркуші із зошита, вказати №№ задач, прізвище і клас.
2. Необхідно подавати не лише відповіді до задач, але й усі перетворення, обгрунтування і пояснення.
3. Писати виразно, без виправлень, необхідні рисунки виконати чітко.

ПРИЙМАЙТЕ УЧАСТЬ В ОЛІМПІАДІ.

Після проведення I туру вивішуються підсумки його:

ПІДСУМКИ I ТУРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ

27 I — 4 II 1958 р.

№№ пп.	Клас	Прізвище	Задача № 1	Задача № 2	Задача № 3	Задача № 4	Задача № 5	Задача № 6	Задача № 7	Задача № 8	Задача № 9	Всього очок	УВАГА
		Очки	1	3	2	2	2	3	2	3	2		
1.	10а	Лещинська	1	2	2	2	2	3	2	3	2	19	
2.	»	Козлов	1	3	2	1	2	3	2	3	2	19	
3.	10в	Повод	1	3	2	1	2	3	2	3	2	19	До II туру
4.	9б	Гусєва	1	3	1	2	1,5	3	2	3	2	18,5	допускаю-
5.	9б	Тиманюк	1	3	1,5	2	1,5	2,5	2	3	2	18,5	ться всі пе-
6.	9а	Гороховська	1	3	1	1,5	1,5	3	2	3	2	18	релічені учні
7.	10а	Бобров	1	3	2	1,5	1,5	2,5	1,5	3	2	18	
8.	10в	Шаболтас	1	3	2	1,5	1,5	2,5	1,5	3	2	18	Для учнів
9.	9б	Глинська	1	3	1,5	1	2	2,5	2	3	2	18	8 кл. олім-
10.	10а	Терехов	1	2	1	1,5	2	3	2	3	2	17,5	піада буде
11.	10в	Гой	1	3	2	—	1,5	3	2	3	2	17,5	проведена
12.	10а	Скорий	1	3	2	1,5	1,5	2,5	1,5	3	1,5	17,5	окремо
13.	10.	Пронькін	1	3	2	1	1	2	2	3	2	17	
14.	9б	Гальченко	1	3	1,5	2	1	2	2	3	1,5	17	9 «в» кл.,
15.	9б	Сергєєва	1	3	1,5	1	2	1,5	2	3	2	17	який не при-
16.	10г	Єременко	1	3	2	1	1	2	2	3	2	17	ймає участі
17.	10в	Горшкова	1	3	1,5	1	1	2	2	3	2	16,5	в I турі із
18.	10г	Півняк	1	3	2	1	1	1,5	2	3	2	16,5	олімпіади ви-
19.	10а	Скляр	1	3	1,5	1	1,5	2,5	1,5	3	1,5	16,5	ключається
20.	10б	Даценко	1	3	2	1	1	2	2	3	—	15	Жюрі
21.	8а	Козлова	1	3	1,5	1,5	1,5	1,5	—	—	—	10	
22.	8а	Равва	1	2	1	1	1	1,5	—	—	—	7,5	

Потім вивішуються завдання II туру, пізніше підсумки його.

РОЗПОЧИНАЄМО ДРУГИЙ ТУР ОЛІМПІАДИ

ЗАДАЧІ ДЛЯ 10 КЛАСУ.

1. Із двох чисел 10 і 9, використовуючи прийняті в математиці знаки, скласти число 3. — 2 очки.

2. Обчислити (двома способами):

$$i^{m-1}(i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3}) \text{ — 1 очко.}$$

3. Скільки чотиризначних чисел можна одержати, переставляючи всіма можливими способами цифри числа 19058? — 2 очки.

4. Чи буде описаний рівносторонній многокутник правильний. Довести — 2 очки.

5. Спростити і обчислити вираз:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x \cdot \cos 16x, \qquad \text{— 3 очки,}$$

при $x = 60°$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ 9-го КЛАСУ.

1. Задачу про ластівку і поїзди.

Віддаль між двома містами 320 *км*. З цих міст одночасно виходять назустріч один одному два поїзди. Один рухається із швидкістю 45 *км*, другий 35 *км* на годину. Разом з першим поїздом вилітає ластівка із швидкістю 50 *км* на годину і летить назустріч другому поїзду. Зустрівши другий поїзд, ластівка повертає назад і летить назустріч першому поїзду.

Зустрівши цей поїзд, ластівка летить назад назустріч другому поїзду і т. д. Яку віддаль пролетить ластівка до зустрічі поїздів? — 3 очки.

ПІДСУМКИ II-го ТУРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ ПО 10-х КЛАСАХ.

№№ пп.	Прізвище	Клас	Задача № 1	Задача № 2	Задача № 3	Задача № 4	Задача № 5	Очок II туру	Очок I туру	% виконання всіх задач	Зайняте місце
	Очки		2	1	2	2	3				
1.	Лещинська	10а	2	1	1,5	1,5	3	9	18,5	92,5	1
2.	Повод	10в	1,5	1	1,5	1,5	3	8,5	19	90	2—4
3.	Козлов	10а	2	1	1	1,5	3	8,5	19	90	2—4
4.	Бобров	10а	2	1	2	1	3	9	18	90	2—4
5.	Безверхий	10а	2	1	2	1,5	2,5	9	—	90	5—6
6.	Васильєва	10а	2	1	1,5	1,5	3	9	—	90	5—6
7.	Терехов	10а	2	1	1,5	1	3	8,5	17,5	87	7
8.	Пітенко	10а	1,5	1	1,5	1,5	3	8,5	—	85	8
9.	Пронькін	10г	2	1	0,5	1,5	2,5	7,5	17	80	9—10
10.	Єременко	10г	2	1	0,5	2	2,5	8	16	80	9—10

Далі подаются матеріали і підсумки III туру.

2. Три числа складають геометричну прогресію. Їх сума дорівнює 63, а їх добуток дорівнює 1728. Знайти ці числа — 2 очки.

3. Обчислити: $x = 10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\log_{16}9 - \log_{16}2}$ — 2 очки.

4. Обчислити: $x = \mathrm{ctg}15^\circ \cdot \mathrm{ctg}30^\circ \cdot \mathrm{ctg}45^\circ \cdot \mathrm{ctg}60^\circ \cdot \mathrm{ctg}75^\circ$ — 1 очко.

5. Чи буде описаний рівносторонній многокутник правильним: розглянути випадок парного числа сторін і випадок непарного числа сторін — 2 очки.

Розв'язки приймаються до 12-го лютого включно.
Розв'язки опускати в урну.

УВАГА!
РОЗПОЧИНАЄМО ЗАКЛЮЧНИЙ 3-й ТУР МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ.

Задачі для 10 класу.

1. Побудувати графік функції: $y = \pm \frac{x}{3}\sqrt{9 - x^2}$

2. Повна поверхня конуса дорівнює M, а бічна поверхня N. Відшукати кут нахилу твірної до площини основи. Обчислити при

$$M = 29{,}19 \text{ кв. од. і } N = 19{,}29 \text{ кв. од}$$

3. Знайти сьомий член геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює $\left(1 + \frac{1}{i}\right)$, а перший член дорівнює i.

4. Привести до виду зручного для логарифмування

$$2 + \mathrm{tg}2\alpha + \mathrm{ctg}3\alpha$$

5. Записати число 5 трьома двійками.

Задачі для 9 класу.

1. Знайти площу квадрата, вписаного в правильний трикутник, сторона якого «а».

2. Обчислити $\cos 36^\circ$, якщо $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

3. Через гіпотенузу даного прямокутного трикутника проведена площина на віддалі 3 *см* від вершини прямого кута. Обчислити площу трикутника, якщо відомо, що кожен катет в два рази більший своєї проекції.

4. Обчислити (без таблиць): $\lg\mathrm{tg}15^\circ \cdot \lg\mathrm{tg}30^\circ \cdot \lg\mathrm{tg}45^\circ \cdot \lg\mathrm{tg}60^\circ$.

5. Логарифми яких натуральних чисел, що не перевищують 50, можна обчислити (i як), знаючи, що $\lg 2 = 0{,}3010$ і $\lg 3 = 0{,}477$.

Розв'язки приймаються лише до 24 лютого.

Підсумки III туру і всієї олімпіади будуть оголошені на математичному вечорі 8 березня.

Хто вийде переможцем?

Олімпіада проводилась з метою підвищення якості

знань учнів, відновлення в пам'яті знань з математики за попередні класи, підвищення інтересу до вивчення математики з боку всіх учнів.

Умови олімпіади складалися так, щоб охопити 1-м і II-м туром значну частину учнів старших класів. Можна сміливо сказати, що в січні — лютому місяцях школа жила олімпіадою. Завжди біля стенду з матеріалами олімпіади скупчувалися учні, які цікавилися ходом олімпіади.

Задачі першого туру були оголошені 27 січня. На розв'язування всіх задач було відведено один тиждень. Розв'язки учні опускали в спеціальну урну. Вищими балами оцінювались оригінальні й дотепні розв'язування. Повторні пояснення в роботах не зараховувались.

ПО 9-х КЛАСАХ.

№№ пп.	Прізвище	Клас	Задача № 1	Задача № 2	Задача № 3	Задача № 4	Задача № 5	Очок II туру	Очок I туру	% виконання задач	Зайняте місце
	Очки		2	2	2	2	2				
1.	Гороховська	9а	1,5	2	2	2	2	9,5	18	92,5	1
2.	Тиманюк	9б	2	2	2		2	9	18,5	91,5	2
3.	Глиньска	9б	2	2	2		2	9	18	90	3
4.	Гальченко	9б	2	2	2		2	9	17	87,5	5—6
5.	Гусєва	9б	1,5	2	2		2	8,5	18,5	88,8	4
6.	Сергєєва	9б	2	2	2		2	9	17	87,5	5—6
7.	Терешева	9б	1,5	2	2		2	8,5	—	85	7
8.	Борушек	9а	2	2	0		2	7	—	70	8
9.	Глотов	9а	2	2	0		1	6	—	60	9
10.	Тимофієва	9а	—	1	0		1	3	—	30	10

Примітка: 1. Для тих, хто включився в олімпіаду з I туру, обчислено загальний процент виконання задач по двох турах, для останніх — процент виконання задач лише для II туру.

2. При рівності очок — перевага надається учасникам обох турів.

Жюрі.

В першому турі прийняло участь 62 учні, з яких 24 десятикласники, 18 дев'ятикласників і 20 учнів 8 класів. Після першого туру восьмикласники відокремились. Вчителька Злочевська продовжила з ними олімпіаду окремо.

Найбільшу кількість неправильних відповідей було дано на питання:

Чи може вписаний в коло многокутник мати:

а) рівні сторони, але не рівні кути?

б) рівні кути, але не рівні сторони?

Найбільш поширеною виявилась неправильна думка, нібито рівність сторін веде за собою рівність кутів таким же чином, як і рівність кутів веде за собою рівність сторін. Багато випадків порушення вимог необхідності і достатності мало місце і в пропозиції сформулювати ознаки подібності рівнобедрених і рівносторонніх трикутників.

До другого туру було допущено 17 десятикласників і 10 дев'ятикласників. Другий тур проходив з 6 до 12 лютого. В ньому приймали участь всі 27 допущених до нього учнів. Задачі були ускладнені порівняно з першим туром.

ПІДСУМКИ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ 9—10 КЛАСІВ (ЛЮТИЙ 1958)

№№ п.п.	Прізвище учня	Клас	Кількість очок по турам			Всього очок	% виконання	Зайняте місце
			I-тур	II-тур	III-тур			
	Десяті класи							
1	Козлов В.	10а	9,5	8,5	10	28	93	I
2	Повод Ю.	10в	9,5	8,5	10	28	93	I
3	Лещинська П.	10а	9,5	9	9	27,5	92	II
4	Півняк Г.	10г	8,5	—	10	18,5	92	II
5	Терехов Г.	10а	8,8	8,5	10	27,3	91	III
6	Васильєва Е.	10а	—	9	9	18	90	IV
7	Піженко Р.	10а	—	8,5	9	17,5	83,8	V
	Дев'яті класи							
1	Тиманюк	9б	9,5	9	9	27,5	92	I
2	Глинська	9б	9	9	9	27	90	II
3	Гороховська	9а	9	9,5	8,5	27	90	II
4	Сергєєва	9б	8,5	9	9	26,5	88	III
5	Борушек	9а	—	7	8,5	15,5	78	IV
6	Глотов	9а	—	6	8,5	14,5	72	V

Лише одна дев'ятикласниця знайшла раціональний спосіб обчислення виразу:

$$\mathrm{ctg}15^\circ \cdot \mathrm{ctg}30^\circ \cdot \mathrm{ctg}45^\circ \cdot \mathrm{ctg}60^\circ \cdot \mathrm{ctg}75^\circ.$$

В десятикласників найбільше число помилок припадає на питання: чи буде описаний навколо кола рівносторонній многокутник правильним?

До заключного третього туру було допущено десять десятикласників і шість дев'ятикласників. Треба відмітити, що задачі кожного туру розв'язували (не подаючи розв'язків) і не учасники олімпіади. Більшість десятикласників добре справилась майже з усіма задачами. Добре був побудований графік функції:

$$y = \pm \frac{x}{3} \cdot \sqrt{9 - x^2}$$

Зате вимога записати число 5 трьома двійками викликала багато труднощів і клопоту.

За підсумками трьох турів були визначені переможці олімпіади.

По 10 класах перше і друге місце розділили між собою учні Козлов і Повод, третє місце зайняли Лещинська, Півняк, Терехов. По 9 класах перше місце зайняла учениця Тиманюк, друге — Глинська, третє — Сергєєва і Гороховська. Ці результати були повідомлені лише на математичному вечорі. Там же були вручені грамоти і подарунки переможцям. Місця дівчат виявились дуже почесними.

По 10 класах в I і II турах учениця Лещинська займала перше місце і лише в третьому турі поступилася першості.

По 9 класах дівчата твердо випередили всіх хлопців. Всі призові місця зайняли дівчата, відтіснивши хлопців на четверте, п'яте і більш віддалені місця.

III.

Враховуючи велике виховне і освітнє значення запланованого математичного вечора, програма вечора була ретельно продумана. Багато сил і енергії було приділено

організації вечора. На черговому занятті гуртка були повідомлені результати розшуків імен жінок-математиків і джерела відомостей про них. Імен виявилось досить. Серед них, крім Ковалевської,— Литвинова, Шіфф, Наришкіна, Гернет, Аньєзі, Іпатія, Жермен, Лепот, Полубаринова-Кочина, Келдиш, Барі, Олійник, Красильщикова, Масевич. Грунтовне знайомство з біографіями і творчістю кожної з названих вчених викликало певні труднощі.

Вирішили повідомлення про них давати по такому плану:

1. Жінки-математики минулого.
2. Софія Василівна Ковалевська.
3. Радянські жінки-математики.

Необхідно було згадати і про учениць, що раніш закінчили цю школу і що вчаться зараз. У зв'язку з цим у план було внесено ще два повідомлення:

1. Наші випускниці-математики.
2. Наші дівчата — любителі математики.

На цьому ж занятті гуртка були виділені учні для виступів, а також складена програма художньої самодіяльності і розподілені інші обов'язки, зв'язані з підготовкою до вечора.

Одночасно з підготовкою доповідей, виступів і проведенням репетицій художньої самодіяльності йшла організаційно-технічна підготовка вечора. Редколегія гуртка готувала спеціальний номер математичної газети «Видатні жінки-математики», яка вийшла напередодні вечора. В газету вміщено два портрети: С. В. Ковалевської і О. А. Олійник, представників старшого і молодшого поколінь російських жінок-математиків. Їм же присвячені статті біографічного характеру. В газеті вміщені фотографії найсильніших дівчат-математиків 9 і 10 класів і замітки про них. Внизу завжди постійний розділ: «Подумай—сообрази».

Група учнів фотографів-любителів готувала запрошення на фотопапері. Ці білети стали традиційними пам'ятками про математичні вечори. Створення художнього зразка для віддрукування (негатива) і друкування 200 білетів — запрошень — немалий труд, але любителі з охотою і доброякісно його виконали (Рис. 39).

Шкільні художники намалювали для сцени два великі портрети С. В. Ковалевської і Е. А. Красильщикової, а також плакати з їх висловами про математику. Над сценою лозунг «*Среди всех наук, открывающих человечеству*

путь к познанию законов природы, самая великая наука — математика» (С. В. Ковалевская).

Стінна математична газета і художньо оформлені підсумки олімпіади прикрасили сцену з обох боків. На стінах залу плакати з цікавими задачами — головоломками. Знову вивішені раніше випущені номери математичних газет та газети за минулі роки.

Йшла інтенсивна робота по художньому оформленню сцени. Основне оформлення пристосування до вистави: «Легенда винахідників шахової дошки». Треба було ство-

Рис. 39.

рити на сцені картину внутрішнього вбрання палацу індуського царя Чатуранг. Дівчата 9 класів з охотою взялися за виконання цього завдання.

З обох боків сцени вони любовно в індійському стилі виготовили 2 колони і арку з роз. На сцені в центрі світяще вікно з індійським орнаментом. За вікном силуети пальм, освітлені пучком світла проекційного ліхтаря.

Остання площа стін і підлога закрита килимами, на підвищенні трон царя.

Бронзова статуетка бога Вішну (її дістали в одного з учителів), канделябри, опахало з кольорового пір'я доповняли обстановку.

На час доповідей трон винесли, вікно в центрі завішене екраном, вивішені портрети Ковалевської і Красильщикової, поставлена трибуна і стіл для президії.

Велику допомогу у виготовленні костюмів до постанови надали батьки учнів та міський будинок культури.

IV.

Вечір відбувся 8 березня. На вечір були запрошені всі десятикласники, всі учасники олімпіади 8—9 класів і гості з сусідніх шкіл. Були запрошені також батьки і вчителі-пенсіонери.

Вечір відкрив керівник математичного гуртка.

Доповідь про жінок-математиків минулого зробила учениця 10 класу Пігунович. Розповідь супроводжувалась демонстрацією необхідних ілюстрацій через епідіаскоп на великому екрані. Називаються прізвища жінок-математиків минулих віків, француженок Софії Жермен (1776—1831), Гортензії Лепот (1723—1788), Маркізи дю Шатле (1706—1749) і італійки Марії Аньєзі (1718—1799). Більш детальна розповідь про одну із найстародавніших вчених жінок-математиків Іпатію із Олександрії, дочки відомого грецького математика Теона.

Вона була надзвичайно вродлива, і в той же час талановита і розумна. Їй належать праці по тлумаченню творів Платона і Арістотеля, а також твори з астрономії і математики (теорії конічних перерізів). На жаль, про цю дуже цікаву особу у нас не виявилось достатніх відомостей. Не вдалося відшукати і її портрета. Учениця повідомила про трагічну судьбу цієї стародавньої вченої-жінки. В 415 році н. е. вона стала жертвою релігійного фанатизму християн.

Учениця Даценко детально розповіла про життя і діяльність С. В. Ковалевської. Коли було розказано про вільнолюбивий дух С. В. Ковалевської і її симпатії до трудолюбивого польського народу, учениця Савіна прочитала вірш поета-демократа Адама Міцкевича, яким захоплювалась у свій час С. В. Ковалевська, а учень Терехов виконав відомий полонез «Прощание с Родиной» польського композитора — вигнанця Огінського.

Доповідь була ілюстрована портретами і фотознімками з книги Л. Воронцової «Софія Ковалевська». Галерея видатних жінок-учених від Іпатії до вчених жінок

наших днів була завершена розповіддю учениці Лещинської про радянських жінок-математиків, зокрема про молодих наших сучасників Красильщикову, Масевич і Олійник.

Доктор фізико-математичних наук Олена Олександрівна Красильщикова закінчила два вищих навчальних заклади: Московський державний університет і Московський авіаційний інститут. Її спеціальність математика і авіація. Її наукові розрахунки форми крила літака, що летить з понад звуковою швидкістю визнані не лише в Радянському Союзі, але й за кордоном. Але коло її наукових інтересів не обмежується авіацією. Нерідко доводиться їй розв'язувати теоретичні задачі безпосередньо на будовах. Наприклад, задачу про вплив вібрації на лінії надпотужних передач Куйбишев—Москва або розробка теорії руху пісків в Кара-Кумах для полегшення боротьби з піщаними заносами і т. д.

Ала Генріхівна Масевич математик-астроном. Вона є видатним діячем у галузі теоретичних розрахунків запуску штучних супутників Землі і обробки результатів спостережень за ними. А. Г. Масевич учасниця багатьох міжнародних з'їздів учених, на яких вона з честю представляє радянську науку, виступаючи з доповідями і повідомленнями про відкриття. Зараз Масевич є заступником голови Астрономічної Ради Академії наук СРСР. Таку високу посаду до неї жодна жінка в світі не займала. Ковалевська лише мріяла про те, щоб їй дозволили в Росії викладати студентам математику. А. Г. Масевич — одна із радянських математиків, яка своїми працями наближає час здійснення мрії людства про міжпланетні зв'язки.

У Радянському Союзі багато жінок-професорів математики, серед них можна відзначити таких видатних професорів, як Віра Йосипівна Шіфф (померла в 1918 р.), Надія Миколаївна Гернет (1876—1943), Катерина Олексіївна Наришкіна (1895—1940), Єлизавета Федорівна Литвинова (1845—1918).

Учень Пронькін зібрав матеріал і розповів про деяких випускниць школи: Раїсу Шейнерман, яка закінчила фізико-математичний факультет Кіровоградського педагогічного інституту, Бернацьку Нелю, що закінчує свою освіту в Москві. Її майбутня спеціальність машинна математика — лічильні машини, Любарську Майю, студентку Дніпропетровського університету (математичний відділ),

в майбутньому викладача математики і багатьох колишніх учениць цієї школи, які сумлінно працюють у промисловості і сільському господарстві.

Портрети згаданих випускниць були показані через епідіаскоп.

Не забуті були на вечорі і вчителі математики, нині пенсіонери, Гуревич, Кириченко Т. А. і ті, що працюють зараз у школі Юрга Р. Ф., Злочевська С. А., Селіванова Н. К., Мусієнко В. А. Для кожної з них знайшлось декілька теплих слів.

Потім були названі імена учениць, любителів точних наук, яких виявилось немало в згаданій школі.

Тут же були оголошені результати олімпіади, вручені премії і грамоти переможцям.

На закінчення вечора були показані дві інсценіровки «Легенда про винахідника шахів» і сцена з оповідання югославського письменника Нушіча про швидкість поширення слухів у місті.

На цьому закінчено математичний вечір, на якому учасники його ознайомилися з життям і діяльністю талановитих жінок-математиків, дізналися про пригнічення і безправ'я їх до Великої Жовтневої соціалістичної революції та про широкі можливості розвитку творчого таланту за часів Радянської влади.

МАТЕМАТИЧНИЙ ВЕЧІР ДЛЯ УЧНІВ V—VII КЛАСІВ НА ТЕМУ

«РОЗВИТОК АРИФМЕТИКИ В РОСІЇ»

Темою для математичного вечора вчителі математики СШ № 1 м. Олександрії вирішили вибрати питання, присвячене арифметиці і її розвиткові в Росії.

Підготовку до вечора почали з того, що розробили план проведення вечора, підібрали необхідний матеріал, доступний учням V—VII класів.

Всю роботу по підготовці до вечора виконували самі учні, а вчителі лише керували і направляли їх діяльність.

Крім того в підготовці до вечора, в організації і проведенні його активну участь прийняли члени математичного гуртка 8—10 класів. Гуртківці 8—10 класів готували матеріал про розвиток арифметики в Росії, а також допомагали учням V—VII класів в оформленні виступів.

Вечір розпочався уривком із шкільної вистави «Михайло Ломоносов», надрукованої в брошурі В. І. Левашова «Шкільний вечір, присвячений М. В. Ломоносову» (АПН, 1951, стор. 30).

Після цього члени гуртка 8—10 класів розповідали учням про історію розвитку арифметики в Росії.

Виступив учень X класу, який зазначив: «Я торкнуся питання виникнення і розвитку основних розділів і понять початкової математики в Росії.

Математика має дуже цікаву історію. Щоб детально розповісти про історію одного лише розділу математики — арифметики, потрібно було б дуже багато часу.

Тому сьогодні ми коротко познайомимося з основними питаннями історії розвитку арифметики в Росії.

Серед усіх наук математиці належить особливе місце, бо математика — це мова, на якій говорять всі точні науки, вона озброює нас умінням вивчати явища світу.

В кожній галузі знань потрібна математика. Без математики не можливе конструювання машин, спорудження будинків, вирощування високих урожаїв і т. д.

Не випадково М.І.Калінін надавав великого значення математиці. У«Зверненні до старшокласників Ленінського району м. Москви» в квітні 1941 року, він відмітив:

«Я вважаю математику важливою наукою саме в сучасних умовах і саме для вас, радянської молоді, що навчається. Математика дисциплінує розум, привчає до логічного мислення. Недаром кажуть, що математика — це гімнастика розуму... Яку б науку ви не вивчали, в який би вищий навчальний заклад не вступали, в якій би галузі не працювали, якщо ви хочете залишити там який-небудь слід, то для цього всюди необхідне знання математики. А хто з вас не мріє стати моряком, пілотом, артилеристом, кваліфікованим робітником у різних галузях нашої промисловості, будівельником, металургом, слюсарем і т. д.? Але всі ці професії вимагають хорошого знання математики».

«Математика, як і інші науки,— зазначив Ф. Енгельс,— виникла з практичних потреб людей...»

Передову математику розробляли вчені, які чуйно прислухалися до потреб практики. Саме такими були російські математики. Вони показали всьому світові зразкові приклади математичної творчості, дали блискучі зразки

застосування математичних теорій до питань природознавства і техніки.

Ще в VIII віці видатний узбецький вчений ал-Хорезмі писав у передмові до своєї книжки, що він «... склав цей невеликий твір із найбільш легкого і корисного в науці числення і притому такого, що необхідне завжди людям в судових процесах, в торгівлі і у всіх їх ділових взаємовідносинах, у випадках вимірювання земель, проведення каналів, у геометричних обчисленнях».

Основоположник російської науки М. В. Ломоносов відводив у своїй різноманітній діяльності значне місце роботі над математичним оснащенням наук, вивчаючих природу. Так, ним були написані праці «Елементи математичної хімії», «Теорія електрики, розроблена математичним шляхом».

Ломоносов, підкреслюючи значення математики, писав: «Все, що без того було темне, сумнівне і невірне, математика зробила ясним, вірним і очевидним».

Великий російський математик П. Л. Чебишев (1821—1894 р.) був ученим, який частіше, ніж хто-небудь із математиків, розв'язував задачі, що випливали з практичних потреб людини. Про це можна судити по заголовках його праць, серед яких зустрічаємо такі: «Про побудову географічних карт», «Про один механізм», «Про зубчаті колеса», «Про крій платтів» і т. д. Він вивчав будову вітряних млинів, різних заводських устаткувань і за його словами, всюди стикався з питаннями математики, про які наука його часу знала мало.

Можна привести численні приклади того, як оригінальні, зовсім нові для математики того часу ідеї виникали із розв'язування чисто практичних задач.

Живо реагувала на потреби, що їх вимагало життя, і арифметика — один із розділів математики.

Розглядаючи питання про історію виникнення арифметики у народів нашої батьківщини, зупинимося коротко на тому, яку роль у розвиткові останньої відіграли вірменський учений Ананія із Шірака (VII вік), узбецькі вчені Мухамед аль-Хорезмі (VIII вік) і аль-Каші (XIV вік).

Для того, щоб охарактеризувати той винятково високий рівень, якого досягнув розвиток арифметики у народів наших республік в середні віки, приведемо слідуючі факти.

Із творів Ананія особливий інтерес для нас являє підручник з арифметики і задачник, у якому вміщені таблиці додавання, віднімання, множення й ділення, які належать до найдавніших таблиць, відомих в науці.

Висота рівня знань Ананія стає ясною, якщо вказати, що сучасник його, англійський монах Беда «Достопочтенный», який вважався в Європі самою вченою людиною свого часу, говорив: «На світі є багато важких речей, але немає нічого такого важкого, як чотири дії арифметики». Ананія ж розв'язував задачі, що вимагають додавання восьми дробів, серед знаменників яких є 7, 8, 9, 13, 14, 16, 20, що приводить до дуже великого спільного знаменника.

Таким чином, дії над дробами, які одинадцять століть пізніше викликали жах у тих, хто вивчав арифметику в Англії, для Ананії із Шірака не являють собою труднощів. Ал-Хорезмі написав підручник арифметики, за латинським перекладом якого вчилися європейські народи.

Ал-Каші вперше ввів у науку десяткові дроби, без яких немислимі сучасні математика і техніка. Це мало місце на 175 років раніше, ніж з'явилися десяткові дроби в Європі».

Потім інший учень IX класу у своєму виступі розповів про «Арифметику у російського народу».

Письмові пам'ятники математичних знань російського народу ми маємо, починаючи близько з тисячного року нашого літочислення.

Ці знання є результатом попереднього тривалого розвитку і основані на практичних потребах людини.

Рано виник у Росії інтерес до науки в широких колах населення.

Зустрічалися в дуже ранню епоху «числолюбці», які цікавилися математикою не лише в тій мірі, в якій вона була потрібна безпосередньо для практичної діяльності, наприклад, новгородський монах початку XII століття Кирик, який написав у 1134 році книгу «Кирика — диакона Новгородского Антониева монастиря учение, им же ведати человеку числа всех лет», при лічбі застосовував «дробові числа», розуміючи під ними долі дванадцятигодинного дня.

Доходячи в цій лічбі до сьомого дробового числа, яких в дні виявляється 937500, він заявляє: «больше сего не бывает»— це, мабуть, означає, що дрібніших поділів дня

не існувало. Кирик підрахував з азартом, скільки місяців, скільки днів, скільки годин він прожив.

В росіян числа позначали спочатку зарубками на паличках, які називались бірками. Потім наші предки писали числа з допомогою букв, слов'янського алфавіту, над якими ставилася особлива позначка — титло. Впливом цієї нумерації пояснюються деякі терміни російської мови, наприклад, у старих підручниках граматики буква «И» називалась «И осьмирічне», а буква «і» — «И десятирічне». Пояснюються ці назви тим, що в слов'янській нумерації буква «И» означала 8, буква «і» — 10 (ілюструємо таблицю «Славянская нумерация», див. Б. В. Гнеденко «Очерки по истории математики в России», стор. 229, видання 1946 р.).

Потреби господарського життя далекого минулого задовольнялися порівняно невеликими числами — так званим «малым счетом» наших предків, який доходив до числа 10000, що в найстаріших пам'ятках називається «Тьма», тобто темне число, яке не можна ясно уявити.

В дальнішому границя малої лічби була продовжена до 10^8, до числа «тьма тем».

Старовинний рукопис відносно цього заявляє, що «больше сего числа несть человеческому уму разумети». Але поруч з цим «малим число», «коли прилучался великий счет и перечень», вживалась друга система, яка називалася «великим числом или счетом», або «числом великим славянским». В ньому вживалися більш високі розряди: тьма — 10^6, легіон — 10^{12}, леодр — 10^{24}, ворон — 10^{48}; інколи ще колода — десять воронів — 10^{49} (хоч треба було б за колоду прийняти, слідуючи системі, 10^{96}).

Для позначення цих великих чисел наші предки вживали оригінальний спосіб, який не зустрічається в жодного з відомих нам народів: число одиниць будь-якого з указаних вище розрядів позначається тією ж буквою, що й прості одиниці, але обрамлені для кожного числа відповідним бордюром.

В першому друкованому російському підручнику математики, в «Арифметиці» Л. Ф. Магніцького (1703 р.), подаються вже інтернаціональні терміни для великих чисел (мільйон, більйон, трильйон, квадрильйон).

Слов'янська нумерація в Росії втратила своє практичне значення з прийняттям індуської.

В Західній Європі того періоду при записі чисел кори-

Рис. 40.
Титульний лист «Арифметики» Магніцького.

стувалися римською нумерацією, яка була незручною, бо відтворення навіть малих чисел вимагало великої кількості знаків (наприклад, 878 записувалося так: ДССССLXXVIII). Наші сучасні цифри в Західній Європі з'являються лише в тринадцятому столітті».

Далі учень VIII класу зупинився на арифметиці Л. Ф. Магніцького. Він сказав, що на розвиток арифметики в Росії в XVII віці величезний вплив має автор першої оригінальної енциклопедії математики, присвя-

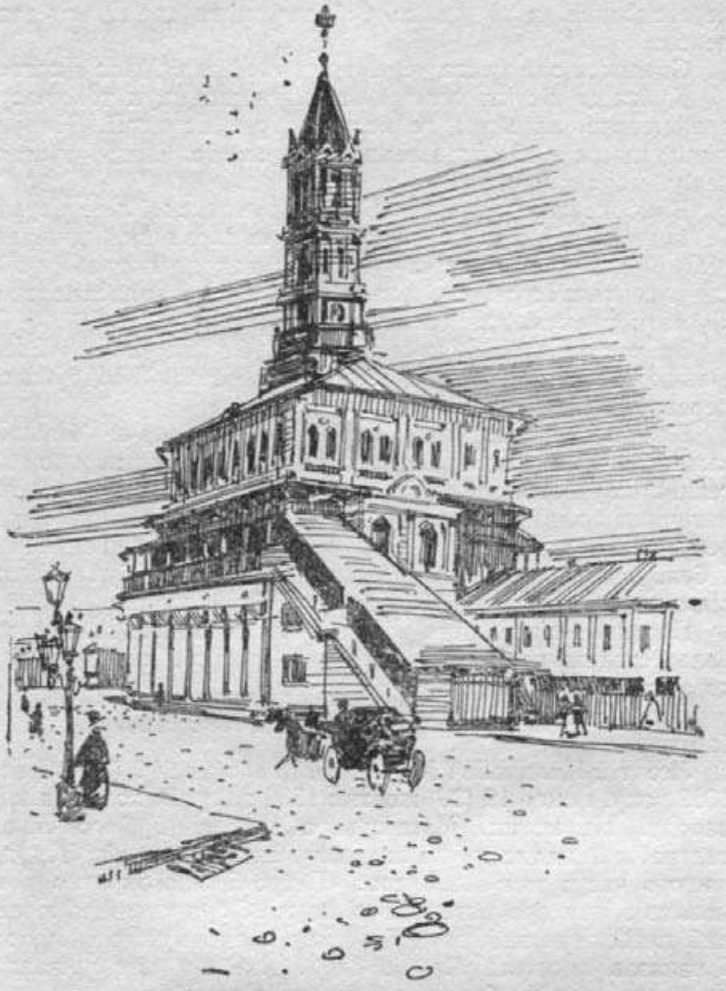

Рис. 41. Сухарева башта.

ченої в основному арифметиці, Л. Ф. Магніцький (XVII вік).

1703 рік є знаменною датою в історії розвитку математики в Росії, бо в цьому році видано арифметику Л. Ф. Магніцького, яка називається: «Арифметика, сиречь наука числительная. С разных диалектов на славянский язык

переведённая, и во едино собрана, и на две книги разделена...

Сочинися сия книга через труд Леонтия Магницкого».

Книга ця містить основи математичних наук того часу: арифметики, алгебри, геометрії і тригонометрії. Наприкінці книги є відділ з великим числом таблиць, присвячених морській справі.

Використавши, крім російської рукописної літератури, те що йому здавалось корисним із іноземних джерел, Магніцький весь матеріал пристосував до потреб російського читача і зумів створити книгу, яка виявилася надзвичайно корисною для багатьох самоучок.

За часів Петра I, коли книга побачила світ, в Росії швидко зростали промисловість та торгівля і відбувався переворот у військовій техніці.

Країні стали потрібні освічені люди в значно більшій кількості, ніж у попередні десятиліття. Було створено ряд технічних учбових закладів, першим з яких була школа математичних і навігаційних наук, відкрита в Москві, в Сухаревій башті в 1701 році. Для учнів цієї школи насамперед і було призначено книгу Магніцького. Вона була відповіддю палкого патріота на запити Батьківщини.

Протягом півстоліття книга з честю виконувала свою роль, ставши посібником для всіх росіян, які прагнули до математичної освіти.

Про автора цієї дуже цінної книги ми знаємо дуже небагато.

Леонтій Пилипович Магніцький народився 9 (19) червня 1669 року, помер 19 (30) жовтня 1739 року. Виходець він із народу. На могилі Магніцького зроблений його сином надгробний напис є єдиним документом, що зберігся до нашого часу; там зазначено: «Петро I многократно розмовляв з ним про математичні науки і був такий захоплений глибокими знаннями його, що називав його магнітом і наказав писатись Магніцьким». Яке він має прізвище до цього, навіть близким його не відомо.

Навчався Магніцький в єдиному на той час в Росії вищому навчальному закладі — в Слов'яно-греко-латин-

[1] С. Смірнов в «Історії Московської слов'яно-греко-латинської академії» (Москва, 1855, стор. 252) твердить: Магніцький навчався в Московській академії, очевидно, ще при братах Ліхудах (Іоаннікія і Софронія), але при цьому не вказує ніяких джерел, звідки запозичив це твердження.

ській академії в Москві, де навчання проводилося на латинській і грецькій мовах.[1].

Математика в академії не викладалась, і в ній Магніцький був самоучкою. Магніцький знав латинську, грецьку, німецьку та італійську мови. Він зазначив, що матеріал для своєї книги «Из многих разных книг собравше — из грецких ибо из латинских, немецких же и итальянских». Але підкреслив, що «разум весь собран и чин. Природно русский, а не немчин».

Успішно закінчивши академію, він аж до своєї смерті працював учителем навігаційної школи, яка була першим розсадником математичних знань у Росії.

М. В. Ломоносов називав «Арифметику» Магніцького «вратами своей учености» і знав її напам'ять. «Вратами учености» ця книга була для всіх росіян першої половини XVIII століття, які прагнули до освіти.

Літературна діяльність Л. Магніцького не обмежилась його «Арифметикою».

В 1703 році Магніцький спільно з своїми англійськими товаришами видає — вперше російською мовою — «Таблицы логарифмов и синусов, тангенсов и секансов к научению мудролюбивых тщателей».

У 1722 році вони ж видали мореплавний довідник «Таблиц горизонтальных северные и южные широты».

Магніцький високо цінив теорію. Він поділяв свою «Арифметику» на дві книги: першу називає «Арифметика — політика», другу — «Арифметика — логістика».

Перша призначається для тих, хто хоче тільки навчитись розв'язувати практичні питання — «исчисляти всякое исчисление в продаже и куплях». Цю частину викладено без доведень, розказуванням і показом — розв'язуванням прикладів.

Друга частина — «арифметика — логістика» — розв'язує абстрактні питання, «Токмо уму нашему подлежащие».

Російська метематична література не знає іншої книги, яка мала б таке величезне історичне значення.

Книга Магніцького набула поширення серед читачів. Вона стала посібником для тисяч самоучок.

Магніцький високо цінив арифметику, вважаючи її життєвонеобхідною. Так, у своїх творах він запевняє читача, що арифметика потрібна всім і її повинні вивчати і купці, і ремісники, і художники, і кожен «хотящий быть морской пловец, навигатор или гребец», «и всяк лучший воин эту науку знать достоин».

У зв'язку з цим Магніцький в заключенні звертається до читачів книги з гарячим закликом:

«Арифметике любезно учися,
В ней разных правил и штук придержися.
Ибо в гражданство к делам есть потребно,
Лечити твой ум, аще числит вредно.
Та пути в небе решит и на море
Еще на войне полезна и в поле
Общее всем людям образ дает знати,
Дабы исправно в размерах вступати».

Один з учнів X класу розповів про прості числа. Він зауважив, що дальніший розвиток початкова арифметика одержала у вищій арифметиці (теорія чисел), яку один із видатних математиків Гаусс назвав «царицею математики». В цій галузі російські математики показали всьому світу яскраві приклади математичної творчості.

Теорія чисел вивчає властивості натуральних чисел. Вченням про прості числа, що діляться тільки на одиницю і на самих себе, займалися визначні російські математики: П. Л. Чебишев, Е. І. Золотарьов і ін.

Грецький вчений Евклід вперше довів, що простих чисел нескінченна множина, що не існує найбільшого простого числа.

Біля ста років після нього інший грецький вчений Ератосфен дав спосіб виділення простих чисел із чисел натурального ряду («решето Ератосфена»)[1].

Російський математик-самоучка І. М. Первушін зробив дуже багато для того, щоб заповнити пусті місця таблиці «решета Ератосфена». Зокрема, в 1878 році він розв'язав питання про те: просте чи складове одне з чисел, яке містить 2525223 цифри, знайшовши його дільник 167772161.

Коли б це число надрукувати звичайним шрифтом, то необхідна була б строчка довжиною в 5 *км*, або книжка звичайного розміру в 1000 сторінок. Результати Первушіна були перевірені і підтверджені в Петербурзькій і Паризькій академіях наук.

---

[1] Ератосфен писав на папірусі, натягнутому на рамку, або на восковій дощечці і не закреслював, як це робимо ми, а проколював складові числа. Одержувалось щось подібне до решета, через яке «просіювались» складові числа. Тому таблицю простих чисел називають «решетом Ератосфена».

Але жоден з математиків світу не спроможний був розв'язати питання (в загальному вигляді) скільки простих чисел є в натуральному ряді чисел від 1 до 1000, від 1 до 10 000 і т. д.

В розв'язуванні цього найскладнішого питання математики величезна заслуга П. Л. Чебишева, одного з самих геніальних математиків не тільки в Росії, але й в усьому світі.

В 1850 році Чебишев вивів формулу, яку довгий час шукали і не знайшли найвидатніші математики світу, для оцінки кількості чисел, що містяться між 1 і будь-яким числом X.

Про враження, яке створило відкриття Чебишевим формули для визначення кількості простих чисел, можна судити по відзиву великих математиків. Наприклад, відомий англійський математик Сільвестр (1814—1897 р.) назвав Чебишева «переможцем простих чисел». Він висловив думку про те, що «дальших успіхів у теорії простих чисел» можна чекати лише тоді, коли народиться хтось настільки переважаючий Чебишева своєю проникливістю і вдумливістю, наскільки Чебишев переважав цими якостями звичайних людей.

Не менш показові успіхи радянського вченого академіка І. М. Виноградова, який дав ряд незрівнянних своєю глибиною, силою і тонкістю досліджень з теорії чисел. Він в 1937 році довів, що всяке досить велике непарне число є або саме просте, або становить суму трьох простих чисел. Це положення можна наочно й доступно проілюструвати для учнів VI—VII класів (І. Я. Демпан, із історії математики, стор. 87, таблиця стор. 89).

Для обгрунтування цього положення ним були відкриті ті методи доведення і шляхи досліджень, яких на протязі двохсот років шукали математики всього світу.

Потім учень VIII класу розповів про передову роль російської науки. Він відзначив, що в історії культури немає прикладу більш кровного зв'язку учених з народом, більш самовідданого служіння йому, як це помітно в історії російської науки.

Починаючи з геніального холмогорського рибака Ломоносова, передові діячі російської науки завжди були разом з народом. Полум'яна любов до свого народу, до батьківщини давала натхнення російським вченим, допомагала їм створювати в Росії, не дивлячись на економічну відста-

лість держави, праці, які відігравали велику роль у розвитку світової культури.

В Західній Європі дехто з істориків математики займався явним спотворенням історії математики, щоб приховати першість російської математичної думки в переважній більшості основних розділів математики.

Бували випадки, коли іноземні вчені присвоювали відкриття, зроблені в нашій країні, або ж систематично замовчували їх. Так, наприклад, винахідником десяткових дробів майже у всіх іноземних книгах називається фламандський (бельгійський) інженер Сімон Стевін (1548—1620 рр.), який видавши в 1585 р. брошуру, гаряче агітував у ній за введення у вжиток нових десяткових дробів, при допомозі яких за його словами, «можно решать все житейские задачи без ломаных» (так називалися звичайні дроби у всіх народів).

Проте, як ми вже знаємо, десяткові дроби були введені в наукову літературу біля 175 років до нього узбецьким математиком і астрономом ал-Каші. Обчислюючи значення числа π з точністю до 16-ти знаків, він десяткові знаки називає: десяткові мінути, десяткові секунди і т. д.

В роботі «Ключ к искусству счета», написаній в 1427 р., ал-Каші дає правила обчислень в десятковій системі, тобто вчить множити і ділити десяткові дроби. Такі факти дають нам повне право вважати узбецького вченого початку XV сторіччя ал-Каші, який обгрунтував теорію десяткових дробів, основоположником застосування цих дробів[1].

В заключній частині керівник математичного гуртка V—VII класів зауважив, що перед нами пройшли імена багатьох учених, з теоріями яких ми зустрічаємося в курсі математики середньої школи. Порівнюючи вклади, внесені ними в скарбницю світової культури, не можна не бачити особливого характеру російського генія. У всі часи математична наука в Росії стояла на належній висоті.

Наша країна — батьківщина видатних математиків, які своїми відкриттями збагатили світову науку. В даний час з великим успіхом проводяться в нас математичні дослі-

---

[1] Викладений матеріал про «Розвиток арифметики в Росії» на даному математичному вечорі був використаний лише частково. Вчитель має змогу відібрати з нього найбільш істотне, враховуючи попередні відомості учнів з цього питання.

дження, і наші вчені в більшості відділів математики займають ведуче положення в світовій науці.

Кожен новий рік приносить нам вісті про все нові й нові перемоги радянської науки. Радянські вчені ставлять великі наукові відкриття на службу народу і цим самим прискорюють побудову комунізму в нашій країні.

Після цього учні, використовуючи дошку, в своїх коротких виступах розповідають про розвиток поняття про число і нумерацію в Росії, про виникнення дробових чисел, а також про різні способи арифметичних дій.

Один з учнів роз'яснює біля дошки «спосіб множення російських селян».

Спосіб цей полягає в слідуючому:

Коли треба перемножити будь-які два числа, то потрібно, починаючи з даних чисел, написати два стовпчики чисел: в першому стовпчику кожне число слід множити на два, а в другому — ділити на два доти, поки в другому стовпчику матимемо одиницю.

Додавши числа першого стовпчика, що стоять проти непарних чисел другого стовпчика, одержимо добуток цих чисел.

Наприклад, помножимо таким способом спочатку 47 на 32, а потім 47 на 33.

47	32
94	16
188	8
376	4
752	2
1504	1

$$47 \times 32 = 1504 \cdot 1 = 1504.$$

47	33
94	16
188	8
376	4
752	2
1504	1

$$47 \times 33 = 1551; \ (1504 + 47 = 1551)$$

Потім комусь із учнів пропонують таким способом помножити 53 на 49.

Доводиться, що добуток цих чисел становить 2597.

Після цього робиться висновок, що цей спосіб множення є практичним, якщо доводиться одне й те ж число множити на різні числа. Нехай, наприклад, бухгалтер заводу нараховує належні різним особам суми, при умові, що кожен робітник даного розряду одержує в день 59 крб.

Перший стовпчик, що одержується послідовним подвоєнням, є спільним при всіх множеннях і обчислюється один раз назавжди. Для одержання сум, належних за різні числа робочих днів, залишається складати лише для кожного числа днів другий стовпчик чисел діленням на два, що легко виконується усно. «Спосіб множення російських селян» полягає в заміні множення додаванням і найпростішими випадками множення і ділення чисел на два.

Один з учнів 7 класу підкреслив, що багато учнів, знаючи роль математики в житті, стараються розширити свої знання в цій галузі науки.

Математика — наука не лише корисна, але й цікава.

Сьогодні ми розглянемо цілий ряд цікавих історичних задач і арифметичних фокусів, підібраних з «Математичних розваг Магніцького».

Розвага перша. На сцену виходить учень 6 класу Він розподіляє присутніх на групи по 8 чоловік кожна, кожній групі вручає дротяне кільце. А потім, виконуючи усно в умі необхідні обчислення, безпомилково відгадує, у якого по порядку учня, на яку руку, на який палець і на який суглоб надіте кільце.

Нехай кільце буде знаходитися в четвертого учня на другому суглобі п'ятого пальця (треба умовитись, що суглоби рахуються, наприклад, від основ пальців).

Угадуючий просить когось із групи виконати такі дії, не називаючи чисел, які він дістане:

1) номер особи, яка має кільце, помножити на 2; запитуваний, у думці або на папері, виконує:

$$4 \cdot 2 = 8;$$

2) до добутку додати 5:

$$8 + 5 = 13;$$

3) одержану суму помножити на 5:

$$13 \cdot 5 = 65;$$

4) до добутку додати номер пальця, на якому буде кільце:

$$65 + 5 = 70;$$

5) суму помножити на 10:

$$70 \cdot 10 = 700;$$

6) до добутку додати номер суглоба, на якому буде кільце:

$$700 + 2 = 702.$$

Результат оголошується угадуючому.

Від одержаного числа відгадуючий віднімає 250 і дістає відповідне число

$$702 - 250 = 452.$$

Перша цифра одержаного числа, ідучи зліва направо, дає номер людини, друга цифра — номер пальця, третя цифра — номер суглоба. Кільце буде в четвертої людини на п'ятому пальці на другому суглобі.

Неважко знайти для цього способу пояснення, якого Магніцький не дає.

Нехай кільце буде в людини № a, на пальці № $в$ на суглобі № c.

Виконаємо зазначені дії над числами a, $в$, c:

1) $a \cdot 2 = 2a$;
2) $2a + 5$;
3) $(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25$;
4) $10a + 25 + в = 10a + в + 25$;
5) $(10a + в + 25) \cdot 10 = 100a + 10в + 250$;
6) $100a + 10в + 250 + c = 100a + 10в + c + 250$;
7) $100a + 10в + c + 250 - 250 = 100a + 10в + c$.

Дістали число, в якому номер людини є цифра сотен, номер пальця — цифра десятків, номер суглоба — цифра одиниць.

Правила гри можна застосувати при будь-якому числі учасників.

Розвага друга. Будь-хто з членів гуртка відгадує при допомозі обчислення, в кого з дев'яти осіб, викликаних на сцену, і в якій кишені знаходиться олівець.

Угадування виконувалось із зав'язаними очима, запропоновано було слухачам виконати ряд обчислень, а саме:

помножити на 2 порядковий номер того з учнів, хто взяв олівець; до добутку додати 3; одержану суму помножити на 5. Якщо олівець у правій кишені, то до добутку додати 8, а якщо в лівій, то 9.

Потім відгадуючий запитує, яке число одержалось після обчислень.

Дізнавшись про результат, він негайно від одержаного числа віднімає 22. В різниці, яка одержиться, цифра зліва відповідає номеру того, хто взяв олівець. Наприклад, якщо друга цифра 1, то олівець в правій кишені, якщо 2 — то в лівій.

Припустимо, що олівець у восьмого номера в правій кишені. Тоді обчислення приймуть такий вигляд:

$8 \times 2 = 16$; $16 + 3 = 19$; $19 \times 5 = 95$; $95 + 8 = 103$.

Від числа 103 ви віднімаєте 22, одержується 81. Перша цифра зліва (8) — номер того, хто взяв олівець; 1 — показує, що олівець покладено в праву кишеню.

Третя розвага. Називаються дні тижня, починаючи з неділі: перший, другий, третій і так далі, до сьомого (суботи).

Пропонується кому-небудь задумати день. Члени гуртка відгадують, який день було задумано.

Наприклад, нехай задумано п'ятницю — шостий день.

Угадуючий пропонує виконати про себе такі дії:

1) помножити номер задуманого дня на 2:

$$6 \cdot 2 = 12;$$

2) додати до добутку 5:

$$12 + 5 = 17;$$

3) помножити суму на 5:

$$17 \cdot 5 = 85;$$

4) приписати в кінці добутку нуль і назвати результат (який становить 850).

Від цього числа угадуючий віднімає 250 і дістає певне число

$$850 - 250 = 600,$$

перша цифра якого зліва вказує на порядковий номер задуманого дня.

Отже, тут задумано було п'ятницю — шостий день, враховуючи неділю.

Обгрунтування правила таке саме, як у попередньому випадку (І. Я. Депман. Розповіді про математику, «Радянська школа», 1957 р.).

Розвага четверта. Угадується будь-яке із нижчевказаних прізвищ за допомогою усних обчислень

з цифрами, що складають дату народження або смерті задуманого письменника.

О. С. Пушкін. 1799—1837 рр.

О. С. Грибоєдов. 1795—1829 рр.

М. В. Гоголь. 1809—1852 рр.

М. Ю. Лермонтов. 1814—1841 рр.

Відгадуючий пропонує вибрати будь-яке прізвище, записати його в себе на аркуші паперу разом з датою народження, або смерті цього письменника, відокремити в цій даті дві цифри зліва і записати їх збоку. Записане двозначне число помножити на 2, а до добутку додати 5, суму помножити на 5, до одержаного числа приписати нуль і потім додати число, виражене останніми двома цифрами дати, які знаходяться справа, і сказати результат обчислень. Потім називає задумане прізвище.

Все це відгадувалось дуже швидко.

Більше всього учнів вражало те, що вони, виконуючи обчислення в письмовій формі, допускали помилки, а відгадуючий усно мимоходом вказував на помилковість слухачів і просив перевірити ще раз результат.

Швидкість, з якою встановлювалась помилка, пояснювалась тим, що угадуючому досить було для визначення задуманої дати відняти від одержаного в результаті обчислень кінцевого результату число 250.

Далі один із членів гуртка V—VII класів розповідає про те, як захоплювалися арифметикою поети Лермонтов і Бенедіктов, зазначаючи, що Лермонтов, як указують його сучасники, дуже любив *математику, цікавився нею* і завжди возив з собою підручник математики під час переїздів — з своєї волі чи проти волі — з одного місця служби на інше. Є різні розповіді деяких сучасників, що близько знали Лермонтова, про ставлення його до математики (див. І. Я. Депман. «Розповіді про математику», 1957 р., стор. 63).

Одна з таких розповідей зводиться до того, що на початку 1841 року Тенгінський полк стояв в Анапі. Нудьгуючи, офіцери, серед них і Лермонтов, збирались у кого-небудь з них. Якось мова зайшла про вченого кардинала, що міг розв'язувати в думці найскладніші математичні задачі. Лермонтов зауважив, що тут нема нічого дивного, і він теж може продемонструвати дуже цікавий приклад математичних обчислень. Офіцери попросили Лермонтова зробити це. Поет запропонував офіцерам задумати якесь число, додати до нього спочатку 25, потім 125; відняти

37, а тоді те число, яке задумали спочатку, остачу помножити на 5, одержане число поділити на 2 й вкінці сказав, що одержали $282\frac{1}{2}$. Всі були дуже здивовані, перевіряли свої обчислення, але результат був один і той же.

Після цього, де б поет не з'явився, до нього стали звертатись з просьбами відгадати підраховане число.

Кілька разів він виконував ці просьби, та зрештою йому набридло, і на одному з вечорів Лермонтов відкрив секрет, який полягав у тому, що людині, яка задумала число, дають відняти це число від суми того самого числа і деяких інших підказаних чисел, отже диктуючому легко підрахувати результат, наприклад:

$$[(X + 100 + 206 + 310 - 500 - X) : 2] \cdot 3 = 174.$$

Після цього гуртківець відтворює цю математичну розвагу.

Другий член гуртка повідомляє спогади О. С. Лопухіна, товариша Лермонтова по кавалерійському училищу, зазначаючи, що Лермонтов завжди шукав нової діяльності і ніколи не поринав весь у ту високу поетичну творчість, яка вкрила вічною славою його ім'я, і яка, здавалось, повинна була забирати всю його увагу. Постійно змінюючи заняття, Лермонтов з властивою йому пристрастю, з цілковитим захопленням поринав у нову справу. Таким чином, він якийсь час цікавився тільки математикою. Одного разу, приїхавши в Москву до Лопухіна, Лермонтов замкнувся в кабінеті і до пізньої ночі сидів над розв'язуванням якоїсь математичної задачі. Не розв'язавши її, Лермонтов, змучений, заснув. Задачу цю він розв'язав уві сні. Йому приснилось, що прийшов якийсь математик і підказав йому розв'язування задачі. Лермонтов навіть намалював портрет цього математика.

Виявилось, що портрет дуже схожий на винахідника логарифмів — шотландського математика Джона Непера (1550 — 1617 рр.). Очевидно, до того Лермонтов читав про роботи Непера і бачив його портрет.

З біографій математиків відомі випадки розв'язування ними уві сні задач, яких вони ніяк не могли розв'язати наяву.

Навіть уві сні мозок ученого продовжує працювати над питанням, що лишилось нерозв'язаним. Такий випа-

док відомий з біографії геніального радянського математика І. О. Лаппо-Данилевського (1896—1931 рр.).

Продовжуючи повідомлення, інший учень розповідає про те, що математикою, крім Лермонтова, захоплювались й багато інших поетів.

Так, наприклад, О. С. Пушкін намагався пояснити теперішню форму цифр, порівнюючи форму цифр з числом паличок, крапок і кутів у цифрі.

В повних зібраннях його творів є замітка з рисунком: «Форма цифров арабских составлена из следующей фигуры *AD*(1) *ABDC* (2), *ABECD* (3), *ABD* + *AE* (4)» (рис. 42).

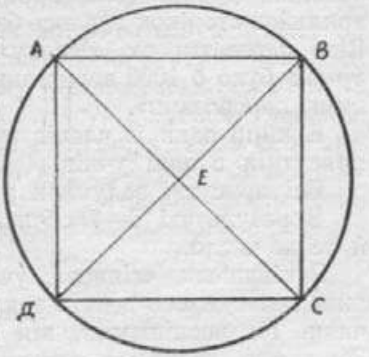

Рис. 42.

О. С. Пушкін називає наші цифри арабськими. Вірніше їх називати індуськими, бо араби були лише передавачами індуських цифр в Європу. (В Росії вони з'явились в кінці XIII ст.). Любителем математики також був російський поет Бенедіктов (1807—1873 рр.), який присвячував своє дозвілля заняттям математикою і залишив рукопис «Увеселительная арифметика», очевидно, одну з перших спроб викладу математики російською мовою в цікавій формі.

Перед тим як приступити до пояснення «таємниць» розваг Магніцького, учень Е. розповідає, що ці «таємниці» легко обгрунтувати, добре знаючи закони математики, правильно застосовуючи їх в житті. Пояснення розваг викликає великий інтерес. Учень Л. розповідає, що ми часто зустрічаємося з великими числами: мільйонами, мільярдами, трильйонами й іншими. Вивчаючи географію, ви знаєте, наприклад, що площа нашої країни — понад 22 мільйони квадратних кілометрів. Проте не всі уявляють собі, які великі ці числа — мільйон, мільярд, трильйон.

Щоб наочно показати це, учень Л. наводить такі приклади:

«Мільйон людей, взявшись за руки, утворили б дуже довгий ланцюг. Початок його був би у Києві, а кінець в Архангельську. Якщо мільйон сірникових коробок покласти одну на одну, утворився б «стовпчик» висотою

в 15 *км*. Щохвилини наші легені 18—20 раз вдихають повітря. Щоб зробити мільярд дихань, необхідно прожити понад 95 років.

Мільярд секунд — це 31,7 року, а мільярд хвилин — приблизно 19 століть. Ми живемо в XX столітті. Значить наше літочислення лише недавно перейшло за мільярд хвилин.

Книга в трильйон сторінок важила б 1 500 000 *т*. Її товщина дорівнювала б 50 000 *км*. Прочитати книгу в трильйон сторінок вдалось би лише через 30 000 000 років. Щоб перевезти цю «Книгу» в розібраному вигляді, потрібно було б 1000 величезних товарних составів з потужними паровозами».

В кінці один із членів гуртка проводить «гіпноз» усіх присутніх в залі учнів.

Всі присутні задумали різні числа.

В результаті 6—7 обчислень у всіх одержалось одне й те ж число.

Закінчивши «гіпноз», учень відкриває шкатулку, в якій знаходилось десять заклеєних конвертів різної величини. Не поспішаючи, він розклеює їх один за одним. З рештою, розклеює останній конверт, в якому і знаходилась табличка з необхідними числами, потім мовчки піднімає її над головою. У всіх одержалась одна і та ж відповідь.

Секрет «гіпнозу», як і розваги Лермонтова, полягає у тому, що всі, хто приймав участь у «гіпнозі», віднімали задумане ними число, яке б воно не було, із суми цього ж числа і деяких інших, підказаних чисел, так, що йому було легко підрахувати результат.

Після цього проходила математична вікторина.

У вікторині можуть приймати участь всі бажаючі. Пропонується здебільшого 6—12 питань і задач. Вікторину в залежності від числа учасників, можна проводити порізному.

Подаємо перший варіант проведення вікторини. Кожне питання або задача зачитується вчителем чи учнем, який проводить вікторину. На обміркування відповіді дається декілька хвилин. Відповідає той, хто перший підніме руку. Якщо відповідь неповна, то можна дати можливість висловитись ще й другому учаснику вікторини. За повну відповідь присуджується два очки, за неповну, але задовільну — одне очко.

Переможцями вважаються ті учасники вікторини (2—4 учні), які набрали найбільше число очок. Окремі задачі і питання лише зачитуються, умови інших задач можуть бути записані на дошці. Так можна проводити вікторину, коли приймає участь порівняно небагато (50—60) учнів.

Якщо ж учасниками є більше (100—200) учнів, то вікторину можна проводити таким способом.

Тексти всіх питань і задач виписуються (заздалегідь) на дошці чи на окремих плакатах, або на окремих аркушах, які роздаються учням. Кожному учаснику видається аркуш чистого паперу, на якому він записує відповідь і коротке пояснення до кожного питання і задачі, а також своє прізвище, ім'я, клас. Цей аркуш він здає жюрі вікторини. Через певний час після початку вікторини (наприклад, через 30 хвилин) прийом аркушів від учасників вікторини припиняється. Жюрі перевіряє розв'язування і виявляє переможців вікторини.

Переможцям видаються невеликі призи (найчастіше книги з математики).

Бажано, щоб запропоновані на вікторині задачі і питання були хоч би частково розібрані. Не можна перетворювати вікторину в олімпіаду. Олімпіада є набагато відповідальнішою формою змагань. Тривалість вікторини — не більше 25—30 хвилин.

Задачі для вікторини повинні бути невеликими, в більшості своїй доступними для розв'язування в думці. Задачі типові, які розв'язуються здебільшого на уроках, не цікаві для вікторини.

Крім задач, у вікторину можна включати також різного роду питання з математики і з історії математики. Приведемо деякі зразки таких питань: 1. Назвати двох видатних радянських математиків. Що вам відомо про них? 2. Що ви знаєте про такого-то вченого (наприклад, про М. І. Лобачевського, П. Л. Чебишева, А. М. Крилова, Архімеда і т. д.)? 3. Які слова можна опустити в тій чи іншій фразі, формулюванні? (Приклад: «Можна побудувати трикутник з сторонами a, $в$, c, якщо кожен із відрізків a, $в$, c менше суми двох інших відрізків, але більше їх різниці». Останні чотири слова можна опустити). 4. Чи можна так говорити? (Приклад: учень сказав: «Перпендикуляр, поставлений до середини прямої AB, рівновіддалений від кінців прямої A і B». Які дефекти в цій фразі?).

У вікторину включають також задачі-жарти. Вікторини можуть бути присвячені повністю якій-небудь одній темі, наприклад, прийомам раціональних обчислень, арифметичним задачам на міркування і т. д. Але найкраще пропонувати комбіновані вікторини.

Рис. 43.

Наведемо зразки задач вікторини, проведеної на даному математичному вечорі.

Гуртківець вивісив для усного рахунку таблицю, яка містить такі приклади:

$$3798 + (191 + 202) =$$
$$3755 + (245 + 1131) =$$
$$5789 + (3128 - 1789) =$$
$$3789 + 13867 + 6211 =$$
$$(13127 + 9978) + 6873 =$$
$$(19371 + 14937) + 5063 =$$

Слово для відповіді надавалось учневі, який перший підняв руку. Але слід намагатися втягнути в роботу велику кількість учасників.

Керівник вікторини називає лідера «змагання».

Вивішується ще одна виготовлена учнем таблиця для усної лічби.

1. $\frac{356 \cdot 708}{354} =$

2. $\frac{798 \cdot 250}{399} =$

3. $\frac{300 + 500 + 1700 + 400}{100} =$

4. $\frac{125 \cdot 38 \cdot 8}{2} =$

5. $1996 : 4 =$

6. $236 \cdot 25 =$

7. $1400 \cdot 450 =$

8. $\frac{3 - 1 : \frac{2}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} =$

9. $6000 - 5858 : 28 =$

10. $4 - 1 : 8 =$

Інший учень вивішує картину Богданова-Бельського «Трудная задача» (рис. 43), на якій зображена «важка задача», яка полягає в тому, щоб при допомозі усної лічби швидко відшукати результат обчислення:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$ [1]

Слідуючий учень вивішує плакат з питаннями:

1. Скільки відрізків на малюнках (рис. 44)?

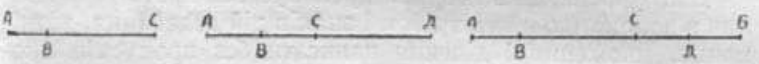

Рис. 44.

2. Скільки дуг зображено на малюнках (рис. 45)?

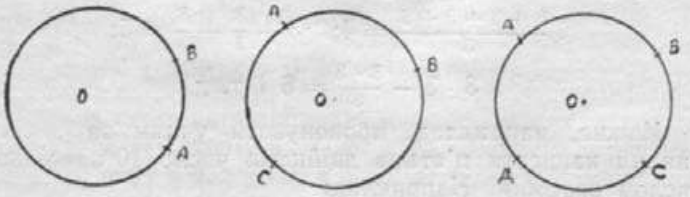

Рис. 45.

[1] П. І. Перельман. Цікава алгебра, 1957, стор. 133.

3. Скільки кутів (менших 180°) видно на рисунках 46 і 47.

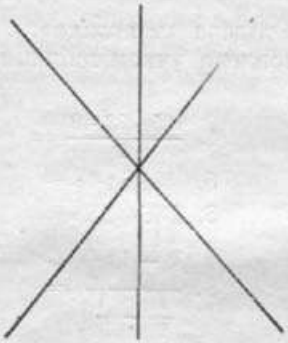

Рис. 46.

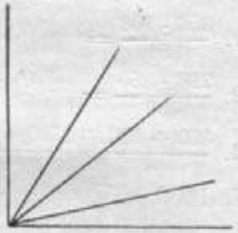

Рис. 47.

4. Скільки квадратів видно на кожному з рисунків а, б, в (рис. 48).

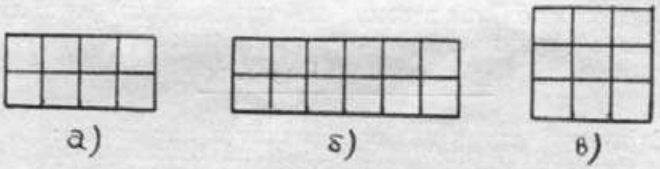

Рис. 48.

Далі учасникам вікторини пропонується протягом 5 хвилин з допомогою п'яти трійок і знаків дій додавання, віднімання, множення і ділення написати без пропусків якомога більше чисел натурального роду, починаючи від одиниці. Наприклад:

$$\frac{3+3+3}{3\cdot 3}=1;\quad 3-\frac{3\cdot 3}{3\cdot 3}=2;\quad 3+3+3-3-3=3;$$

$$\frac{3+3+3+3}{3}=4;\quad 3+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}=5;$$

$$3\cdot 3-\frac{3\cdot 3}{3}=6 \text{ і т. д.}$$

Можна, наприклад, пропонувати учням за декілька хвилин написати п'ятьма двійками число 10 найбільшим числом способів. Наприклад:

$$10=2+2+2+2+2=\frac{22+2}{2}-2=$$

$$=2\cdot 2+2\cdot 2+2 \text{ і т. д.}$$

Далі гуртківець пропонує встановити правильність таких тверджень:

1. Число 40 на стільки одиниць більше від 32, на скільки одиниць 32 менше від 40.

2. Число 40 на стільки процентів більше від 32, на скільки процентів число 32 менше від 40.

Потім пропонується розв'язати слідуючі задачі:

1. Задумане п'ятизначне число, віднято від нього одиницю і одержано чотиризначне. Яке число задумано.

2. Андрій живе на п'ятому поверсі, а Микола живе в тому ж будинку вдвоє вище, ніж Андрій. На якому поверсі живе Микола?

3. Що більше

а) $\frac{99}{100}$ чи $\frac{100}{101}$? б) $\frac{30}{283}$ чи $\frac{12}{113}$?

в) $\frac{18}{115}$ чи $\frac{90}{573}$? г) $\frac{49}{148}$ чи $\frac{121}{362}$?

4. Знайти суму натуральних чисел від 1 до 100, тобто

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 100 = \quad ?$$

(Доцільно розповісти учасникам вікторини, що відомий німецький математик К. Ф. Гаусс (1777—1855 рр.) ще в шестирічному віці відкрив правило для одержання суми «п» перших чисел натурального ряду. Він записав числа від 1 до 100, суму яких треба було знайти, двояким способом.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 98 + 99 + 100$$
$$100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

Додаючи по стовпцях, він виявив, що числа кожного стовпця в сумі дають 101. Стовпців 100, тому в загальній сумі одержиться 100. 101; цей добуток треба поділити на 2 так як числа, які беруться доданками, були написані двічі.

В результаті шестирічний математик зробив перше із своїх багаточисленних і дуже важливих відкрить, що

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

Один із гуртківців пропонує цікаву задачу з російського рукопису XVII століття: «Лев съел овцу одним часом, а волк съел овцу в два часа, а пес съел овцу в три часа. Ино хочешь ведати: все три — лев, волк и пес — овцу съели вместе вдруг, и сколько бы они скоро ту овцу съели сочти ми?»

Автор рукопису пропонує такий спосіб розв'язування: за 12 годин лев з'їдає 12 овець, вовк — 6, а собака — 4. Усього ж вони з'їдять за 12 годин 22 вівці; отже, за годину вони з'їдять $\frac{22}{12}=\frac{11}{6}$ вівці, а одну вівцю всі разом — за $\frac{6}{11}$ години.

Після закінчення вікторини вчитель математики дав учням цінні поради в коротких спогадах про відомого математика професора В. П. Єрмакова (1845—1922).

«Професор Василь Петрович Єрмаков, — розповідав вчитель, — володів особливим способом читання математичних книг.

Він читав першу сторінку нової книги, щоб дізнатися яке завдання перед собою ставить автор, потім останню сторінку, щоб дізнатися до якого результату автор приходить, і, закривши книгу, самостійно знаходив шлях одержання результату. Не раз спосіб розв'язування, знайдений таким чином Єрмаковим, виявлявся відмінним від того, яким користувався автор книги. Наука в цих випадках збагачувалась новими методами.

Бажано, — продовжує вчитель, — щоб школяр, читаючи оповідання про розв'язування нових для нього задач, діяв по способу професора Єрмакова, намагаючись кожен раз самостійно знайти розв'язування задачі або, що ще краще, дати свій оригінальний спосіб розв'язування.

З таких спроб самостійного розв'язування задач почалась творча робота майже всіх видатних математиків.

Так, наприклад, розпочав свою творчість один із геніальніших російських математиків — Г. Ф. Вороний (1868—1908 рр.).

З цього ж починали свою математичну творчість відомі згодом професори — математики Д. А. Граве, І. І. Іванов, В. Ф. Каган, І. І. Чистяков і інші».

Після цього вчитель математики і члени жюрі зайнялися підведенням підсумків вікторини.

Сцену заповнили учасники самодіяльності. Розпочалася художня частина.

В художню частину математичного вечора були включені крім звичайних музикальних, танцювальних й інших художніх номерів, номери математичного змісту в інсценованій формі.

Наведемо окремі з них.

1. Уривок про Магніцького з історичного роману Волкова «Два брати».

2. Вигідна угода (Я. І. Перельман «Жива математика» 1944 р., стор. 81—86).

3. Уривок із п'єси Фонвізіна «Недоросль», в якому показується, як навчався арифметиці Митрофанушка.

4. Оповідання Л. М. Толстого «Много ли человеку земли нужно». (На цьому вечорі були показані перша і третя інсценіровки).

В заключенні вечора переможцям були вручені нагороди. Їх прізвища були вписані в заздалегідь заготовлений текст на книгах, призначених переможцям вікторини.

Один із учасників вечора нагадує пораду, яку 15 років тому на сторінках дитячого журналу «Костер» дав його читачам великий вчений академік Олексій Миколайович Крилов.

«Всьому навчайся сам. Ніколи не розраховуй, що можна оволодіти знаннями без праці. Намагайся не просто запам'ятовувати те, що вивчаєш, а намагайся зрозуміти суть справи. Те, що зрозуміло, легко запам'ятовується й довго не забувається.

Накоплюй досвід... Будь стійким, не бійся розчарувань, не кидай розпочатої справи. Працюй уперто, систематично і щоденно!»

На цьому математичний вечір закінчився.

При підготовці до описаного тут математичного вечора була використана слідуюча література:

1. «Рассказы о русском первенстве». Під загальною редакцією В. Орлова, Вид. «Молода гвардія», 1950.

2. Б. В. Гнеденко. «Очерки по истории математики в России», 1946.

3. І. Я. Перельман. «Жива математика», 1950.

4. І. Я. Депман. «Розповіді про математику», 1957.

5. І. Я. Депман. «Рассказы о решении задач», 1957.

6. І. Я. Депман. «Из истории математики», 1950 і ін.

ПРИКЛАДИ ПРОГРАМ МАТЕМАТИЧНИХ ВЕЧОРІВ

Приклад 1.

Вечір 8—10 класів.

І відділення. 1. Розповіді про радянських математиків (вступне слово вчителя про радянську математичну науку, повідомлення трьох учнів).

2. Вікторина.

II відділення. 1. Вірш «Логарифмічна лінійка».

2. Інсценіровка з комедії Д. І. Фонвізіна «Недоросль».

3. Швидке множення чисел на 99999.

Наприклад. Нехай учень назвав число 64728, на яке треба помножити 99999. Відповідь: $64728 \cdot 99999 = 6272735272$.

Пояснення. Назване учнем число (64728) зменшено на 1 (64727) і до результату приписуються доповнення кожної цифри (цього результату) до 9. Прийом лічби випливає з того, що множення числа на 99999 рівносильне множенню числа на 100000 (тобто приписуються до нього п'ять нулів) і послідуючому відніманню від результату самого числа.

4. Софізм «Сірник у два рази довший телеграфного стовпа».

Пояснення. Нехай a — довжина сірника (в дециметрах), b — довжина стовпа (в дециметрах).

Позначимо різницю $(b - a)$ через c, так що $b - a = c$, $b = a + c$. Перемножимо ці дві рівності почленно.

Одержимо: $b^2 - ab = ca + c^2$.

Віднімемо від обох частин bc.

Одержимо: $b^2 - ab - bc = ca + c^2 - bc$

$$b(b - a - c) = c(a + c - b)$$

$$b(b - a - c) = -c(b - a - c)$$

Звідси $b = -c$, але $c = b - a$, так що $-c = a - b$. Таким чином, $b = a - b$, $a = 2b$

Отже, сірник у 2 рази довший телеграфного стовпа.

5. Інтермедія. «Позначимо рибака через X».

Учень *А* зображає вчителя, *Б* — ученицю. *А*. «*Б*., розв'яжемо задачу». *Б*. «Слухаю, Іван Петрович». *А*. «Рибак за перший день наловив 1 *кг* риби, за другий день в два рази більше, ніж за перший день, а за третій день в два рази більше, ніж за другий день. Скільки всього кілограмів риби наловив рибак?» *Б*. думає. *А*. «Яким же чином думаєш ти її розв'язати?» *Б*. (без зупинки)» «Алгебраїчно, Іван Петрович». *А*. (пожимає плечима). «Ну, розв'яжи...» *Б*. «Іван Петрович, я б хотіла уточнити умову задачі. Значить, за перший день 1 *кг* риби наловив рибак?» *А*. «Да». *Б*. «А за другий день в два рази більше наловив теж рибак?» *А*. «Да». *Б*. «І за третій день — теж рибак?». *А*. «Ну, да».

Б. «Тепер все зрозуміло. Спосіб ясний». *А.* (громко, впевнено): «Позначимо рибака через *X*...»

6. Задача з естради.

Розповідають, що багато років тому назад жили люди на прізвисько рокоманці. Одного разу рокоманський корабль потерпів крах біля одного із островів Великого чи Тихого океану. Корабль був розбитий на тріски; частина команди врятувалась і поселилася на острові. Вони швидко перейняли всі звичаї місцевих жителів і стали у всьому схожими на туземців. Навіть мову свою вони забули. В одному лише вони, як і раніше, відрізнялися від жителів острова: туземець, щоб не говорив, то все правда, а рокоманець, що б не говорив, то навпаки. Через декілька десятиріч французька експедиція випадково виявила обломки рокоманського корабля біля берегів острова. Капітан французького корабля висадився на острів. Він побачив трьох дідів і запитав першого, хто він, туземець чи рокоманець на мові жителів острова. Дід відповів на питання капітана, але той не розчув відповіді. «Перший дід нібито сказав, що він рокоманець»,— сказав капітан, звертаючись до двох інших дідів. «Да,— сказав другий,— він сказав, що він рокоманець». «Ні,— сказав третій,— він сказав, що він не рокоманець, що він туземець». Запитується: ким був другий дід і ким був третій?

7. Математичний фокус.

На столі 3 геометричні тіла: куб, конус, піраміда. До столу виходить член математичного гуртка, запрошує трьох учнів (які позначимо відповідно через *А*, *Б*, *В*.), і, не дивлячись на них, пропонує кожному із них взяти по одному геометричному тілу; першому — помножити число букв у назві взятої ним фігури на 2, другому — написати, скільки букв у назві взятої ним фігури, і приписати до цього числа справа нуль, третьому — помножити число букв у назві фігури, що є в нього, на 11. Одержані три числа треба додати і сказати результат.

Гуртківець відгадує, хто взяв куб, хто — піраміду, а хто — конус.

Пояснення. Нехай у названих фігур, взятих першим *(А)*, другим *(Б)*, третім *(В)* учнями, відповідно x, y, z букв. Тоді $x + y + z = 16$ (так, як $3 + 5 + 8 = 16$).

Нехай учні повідомили мені суму d. Тоді

$$2x + 10y + 11z = d.$$

Тому $2x + 10y + 11(16 - x - y) = d$,
або

$$9x + y = 172 - d, \quad x + \frac{y}{9} = \frac{172 - d}{9}.$$

Звідси (так як $y < 9$) одержуємо, що x — частка від ділення $172 - d$ на 9, а y — остача.

В нашому прикладі $d = 137$, $172 - d = 35$.

$$\frac{35}{9} = 3 + \frac{8}{9}; \quad x = 3, \; y = 8.$$

Перший взяв куб, другий — піраміду, третьому залишився конус.

8. Повідомлення підсумків вікторини.

Приклад 2. Вечір учнів X класів.

I відділення. 1. Розповіді про чудові лінії і поверхні з демонстрацією моделей (виступи п'яти учнів).

2. Софізм «64 = 65».

Із фігури (рис. 49) склали квадрат (рис. 50) і прямокутник (рис. 51) з площами 64 і 65 кв. од.

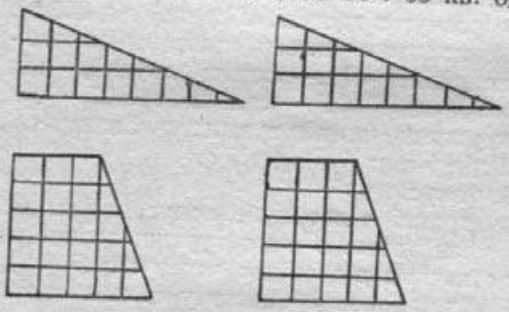

Рис. 49.

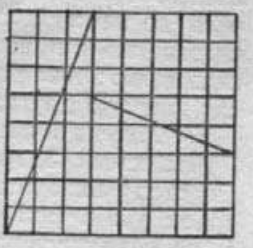

Рис. 50.

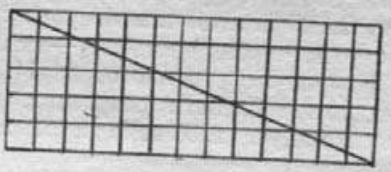

Рис. 51.

Так як площі складені з однакових частин, то 64 = 65.

3. Компактний табель-календар.

II відділення. 1. Математична вікторина.

2. Інтермедія «Відшукай x».

Наводимо приклад. Після одного з виступів (учня H) ведучі A і B виходять на сцену. Перший учень запитує другого, чи сподобалось йому, як виступаючий тільки що учень рахує в умі. Другий учень відповідає, що йому сподобалось, і додає, що сам він множити швидко не може, але деякі задачі непогано розв'язує, наприклад теореми, рівняння.

Перший зауважив, що теореми не розв'язують, а доводять.

Другий каже, що доводить теорему той, хто не вміє розв'язувати її, а він розв'язує і теореми, і рівняння.

Перший зазначає, що він напише рівняння, а другий повинен розв'язати його, останній пропонує краще дома зробити це, але товариш сміється з нього, тоді другий учень погоджується розв'язати тут.

Перший учень (великими буквами) пише на дошці:

$$\left(7+\frac{3}{4-x}\right)\cdot\frac{3}{4}=2.$$

Другий учень думає, потім заікаючись запитує, що ж зробити. Перший відповідає, що треба знайти x (ікс).

Другий сказав, що це дуже просто і вказав пальцем на x (ікс).

3. Швидке множення на 12345679.

Приклад. Назвати будь-яке двозначне число, кратне 9. Його треба швидко перемножити на 12345679. (Учень назвав 54). Відповідь $12345679\cdot 54 = 666666666$.

Пояснення. Ділимо число, назване учнем, на 9, одержуємо однозначне число і виписуємо його підряд 9 разів.

Математичні фокуси.

а) Відгадування віку людини і номера будинку.

Відгадуючий пропонує комусь із присутніх помножити номер будинка, в якому останній проживає зараз, в 1958 році, на 2, додати 5, результат помножити на 50, додати 1708 (в 1959 році треба додати 1709 і т. д.), відняти рік свого народження (19...). «Скільки у вас одержалось? (Нехай, наприклад, одержалось 2718). Ви проживаєте в будинку № 27, вам 18 років».

Пояснення. Нехай x — номер будинку, y — вік, z — рік народження, так, що $y = 1958 - z$ (в 1958 р.)

Проведені арифметичні операції можна записати формулою: $(x\cdot 2+5)\cdot 50+1708-z = 100x+1958-z = 100x+y$.

Отже, скільки в результаті сотень? x, а x — номер вашого будинку. Крім того, скільки в результаті одиниць (приймаючи до уваги також десятки і рахуючи кожен десяток за 10 одиниць)? y — число ваших років.

б) Відгадування трьох однозначних чисел (x, y, z), наприклад номер поверху, числа вікон у кімнаті і кількості братів.

$$\{[(x \cdot 5 + 2) \cdot 2 + y] - 5 + 2\} \cdot 2 + z = 100x + 10y + \\ + z + 44.$$

Результат оголошується відгадуючому.

Віднімаючи від нього (в умі) 44, дізнаємось, чому дорівнює $100x + 10y + z$ (x — число сотень, y — десятків, z — одиниць).

Нехай x — номер поверху, y — кількість вікон в кімнаті, z — кількість братів. Наприклад, відгадуючому повідомлено результат 354. $354 - 44 = 310$. Угадчик говорить: «Ви живете на 3-му поверсі, у вашій кімнаті одне вікно. Братів у вас немає».

Приклад 3. Вечір учнів VIII класів.

I відділення. 1. Різні системи числення (розповіді учнів).

2. Фокуси, зв'язані з різними системами числення.

II відділення. 1. Арифметичні задачі з естради.

2. Софізм «Прямий кут дорівнює тупому».

3. Вірш «Теорема Віета».

Передаємо зміст цього вірша.

Теорема Віета для коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$

$$\left(x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\right)$$

«По праву достойна в стихах быть воспета
о свойствах корней теорема Виета.
Что лучше, скажи, постоянства такого:
Умножишь ты корни — и дробь уж готова.
В числителе c, в знаменателе a,
А сумма корней тоже дроби равна.
Хоть с минусом дробь эта, что за беда —
В числителе b, в знаменателе a».

4. Інсценіровка А. П. Чехова «Репетитор».

Приклад 4. Вечір учнів V—VII класів.

I відділення. 1. Розповіді з історії арифметики (по книзі І. Я. Депмана «Розповіді про математику»).

2. Як піднести до квадрата число, близьке до 50.

Наприклад. Нехай треба піднести до квадрата число x, близьке до 50, але більше 50.

Число це запишемо так:

$$x = 50 + a, \text{ де } a \text{ — лишок } x \text{ над } 50.$$

Наприклад: $58 = 50 + 8$, $x = 58$, $a = 8$;

$$63 = 50 + 13,\ x = 63,\ a = 13.$$

Отже, $x = 50 + a$, $a = x - 50$, $x^2 = (50 + a)^2 = 2500 + 100a + a^2 = (25 + a)\cdot 100 + a^2 = (25 + x - 50)\cdot 100 + a^2 = (x - 25)\cdot 100 + a^2$.

Отже, якщо треба піднести до квадрата число, близьке до 50, але більше 50, то можна виконати такі дії:

а) відняти від цього числа 25, б) приписати до результату двома цифрами квадрат лишка даного числа над 50.

Наприклад, $58^2 = 3364$.

Пояснення. $58 - 25 = 33$, $58 - 50 = 8$, $8^2 = 64$, $58^2 = 3364$, $52^2 = 2704$

Пояснення. $52 - 25 = 27$, $52 - 50 = 2$; $2^2 = 4$, $52^2 = 2704$, $64^2 = 4096$

Пояснення. $64 - 25 = 39$, $64 - 50 = 14$, $14^2 = 196$, $64^2 = 4096$.

3. Два фокуси на «угадування» чисел — 15 хвилин.

Відгадуючий пропонує комусь із присутніх:

задумати число (будь-яке), додати до нього 4, помножити все на 3, додати 3, збільшити результат у два рази, відняти 12, результат розділити на 6, відняти задумане число, результат помножити на 4.

Одночасно в голові він провів розрахунки і відгадав задумане число.

$$x$$
$$x + 4$$
$$(x + 4)\cdot 3 = 3x + 12$$
$$(3x + 12) + 3 = 3x + 15$$
$$(3x + 15)\cdot 2 = 6x + 30$$
$$(6x + 30) - 12 = 6x + 18$$
$$\frac{6x + 18}{2} = x + 3$$
$$(x + 3) - x = 3$$
$$3\cdot 4 = 12$$

Фокус побудований на тотожності:

$$\left\{\frac{[(x + 4)\cdot 3 + 3]\cdot 2 - 12}{6} - x\right\}\cdot 4 = 12.$$

2. Угадуючий пропонує комусь із присутніх задумати однозначне число, подвоїти його, додати 1, помножити на 5, відняти 2, додати 301, закреслити середню цифру, до остачі додати 3 і вгадує результат.

Пояснення. x — задумане число.

$(2x + 1)\cdot 5 - 2 + 301 = 3\cdot 100 + 10x + 4 = 3 \times 4.$

Перша цифра 3, друга x, третя 4. Якщо закреслити середню, то одержимо 34. $34 + 3 = 37$. В даному прикладі після того, як закреслюється невідома цифра x, відгадувач уже знає, що той, хто задумав число, написав 34. Після цього він може з одержаним числом виконувати будь-які операції.

Наприклад, додати 3, відняти 17, помножити на 2 і т. д. Результат все одно йому буде відомий.

II відділення. 1. Інсценіровка «Властелин солнца».

2. Задачі на кмитливість. Дві задачі з естради.

3. Вірші «Кто поможет?» і «Лёшенька, Лёшенька».

4. Гра «Хоп» (на сцені).

Ця гра полягає в тому, що гравці називають послідовно числа натурального ряду (1, 2, 3, 4...). Перший говорить: «один», другий говорить: «два» і т. д.

Замість чисел кратних 3, кратних 7 і чисел, що закінчуються на 7 і 3, треба говорити: «хоп». Той, хто збивається, вибуває з гри. Виграє останній, хто залишився.

Наприклад, *A*, *B*, *C* говорять: *(A)* — «один», *(B)* — «два», *(C)* — «хоп», *(A)* — «четверте», *(B)* — «п'ять», *(C)* — «хоп» (замість 6), *(A)* — «сім». *(A)* вибуває з гри; він повинен був сказати «хоп» замість «сім».

5. Арифметичний фокус.

Ведучий викликає одного з учнів, показує йому дві монети—3 коп. і 20 коп., потім пропонує одну з них взяти в ліву руку, а другу — в праву (але, щоб відгадуючий не бачив), число на монеті в лівій руці помножити на 2, число на монеті в правій руці — на 3, додати 6. Скільки одержалось? (Нехай, наприклад, одержалось 55). Потім каже, що 3 коп. в правій руці, 20 коп.— у лівій.

Приклад 5. Вечір учнів V—VII класів.

Мета вечора. Дати уявлення про машини, що працюють на будівництві гідроелектростанцій на Волзі і Дніпрі, і тим самим закріпити знання учнів з арифметики і познайомити учнів з числами-велетнями.

Вчитель коротко знайомить учнів з творами Архімеда «Псаміт», тобто обчислення піщинок у просторі, рівному кулі нерухомих зірок. Даються короткі відомості про Архімеда і його твори.

Окремі учасники вечора виступають з повідомленнями про конкретизацію чисел: 1 000 000 — число клітин в 32 зошитах; 1 000 000 000 — число хвилин, що минуло з початку нашої ери до весни 1902 р.; розповідають про число зерен, які треба було видати по легенді винахіднику шахової гри, поклавши на клітки шахової дошки 1, 2, 4, 8..., 2^{63} зерен, що в сумі повинно скласти число 18446744073709551615.

Людина за кожні 5 років свого життя проходить віддаль, рівну довжині земного екватора, і т.д.

Після повідомлення вказаних вище відомостей про числа-велетні інші учні повідомляють про машини, що працюють на будівництві гідроелектростанцій.

Земснаряди й інші машини, що працюють на цьому будівництві, замінюють дуже велику кількість робітників. Так, канавокопач замінює 90 робітників, ковш потужного екскаватора захвачує 14 $м^3$ землі, що відповідає навантаженню однієї залізничної платформи.

Матеріал про техніку, що застосовується на будівництві, можна знайти в різних журналах.

Після виступів окремих учнів розв'язуються задачі на кмітливість. Задачі можна пропонувати з книжок: В. А. Ігнатьєв «В царстве смекалки», Я. І. Перельман» «Цікава арифметика», «Загадки і диковинки в світі чисел», Г. Б. Поляк «Цікаві задачі з арифметики», Г. Н. Берман «Лічба і число» та ін.

Приклад 6. Вечір учнів V—VII класів.

Мета вечора. Повідомити учням деякі відомості з історії походження нашої сучасної нумерації і підвищити інтерес до вивчення арифметики.

Перше повідомлення про вавілонський клинопис і обсяг математичних знань вавілонян робить учень. Двоє учнів знайомлять з римською і стародавньою слов'янською системами нумерацій. Третій учень знайомить з індуською системою нумерації, дає еволюцію знаків для позначення цифр у ній; вивішує відповідну таблицю, де останній рядок містить сучасні символи десяти цифр.

Після цього учням подаються скорочені прийоми окремих обчислень.

Заключна частина вечора присвячується розв'язуванню задач, читанню уривків з «Цікавої геометрії» Перельмана.

В заключенні може бути прочитаний уривок із оповідання А. П. Чехова «Репетитор».

Приклад 7. Вечір учнів V—VII класів, присвячується пам'яті великого російського математика М. І. Лобачевського.

Мета вечора. Познайомити з діяльністю великого російського вченого і відмітити його роль у розвитку світової науки.

На початку вечора вчитель вказує дату народження геометрії Лобачевського (1826 р.), що 19 лютого 1829 р. з'являється перша в світі друкована праця по неевклідовій геометрії Лобачевського, надрукована у «Віснику Казанського університету», і коротко розповідає про значення робіт Лобачевського.

Після цього один з учнів повідомляє біографічні дані про Лобачевського.

Другий учень нагадує про окремі теореми геометрії, де є доведення єдино можливого способу.

Такі, наприклад: а) теорема про перпендикуляр, опущений на пряму із точки, взятої поза цією прямою;

б) теорема про проведення кола через три точки, що не лежать на одній прямій та ін. Потім приводиться формулювання аксіоми паралельності: через точку, взяту поза даною прямою, можна провести до неї пряму, паралельну даній, і лише одну; вказується, що заслуга Лобачевського полягає в тому, що він створив свою геометрію, відмінну від геометрії Евкліда, замінивши аксіому паралельності іншою, і цим довів, що твердження Евкліда про проведення єдиної прямої, паралельної даній, є аксіомою, і справедливість цього твердження доведена бути не може (в системі аксіом Евкліда).

Третій учень розкриває історію питання про постулат паралельності, різні еквівалентні йому твердження; для цього можна використати в основному матеріал з книги Б. В. Кутузова «Основи геометрії і геометрія Лобачевського».

Після цього пропонується розв'язати декілька геометричних задач (обман зору, геометричні софізми й ін.), з книг В. М. Брадіса і Харчової «Помилки в математичних міркуваннях учнів»; Обреімов «Математичні софізми» і ін.

В заключній бесіді розповідається про педагогічну діяльність Лобачевського, про його велику роботу по зміцненню Казанського університету, про ту увагу, яку приділив Лобачевський розвиткові середньої математичної освіти; він написав підручники з елементарної математики. Слід також розповісти, що, не дивлячись на нападки реакційної частини вчених, Лобачевський проявив виключну твердість у своїй правоті і впевненість у справедливості винайдених ним ідей.

Можна рекомендувати в заключенні прочитати уривок з книги Носова «Вітя Малєєв в школі і дома» про те, як Вітя розв'язував задачу: довго думав, уявив себе діючою особою, намалював малюнок до задачі і домігся розв'язку задачі.

Приклад 8. Вечір учнів V—VII класів.

Найпростіші інструменти і їх математичне обгрунтування.

Розглядається ряд найпростіших інструментів і приладів і робиться аналіз, на підставі яких теорем, математичних положень основана робота інструменту або приладу:

а) перевірка лінійки;

б) проведення прямої лінії на тканині з допомогою намиленої нитки, натягнутої, як струна, між закріпленими кінцями;

в) перевірка кутника;

г) рейсмус для проведення паралельних прямих в столярній справі;

д) паралельні лещата;

е) терези для листів;

ж) штангенциркуль (мірна вилка);

з) центрошукач;

і) масштаби (числовий, лінійний і поперечний).

В заключенні розв'язується ряд прикладних задач із книги Я. І. Перельмана «Новий задачник з геометрії», 1929:

а) визначити за годинником в сонячний день лінію південь — північ;

б) визначити недоступні віддалі за допомогою рівних трикутників;

в) визначити висоту предмета за допомогою екліметра

ЗРАЗКИ ЗАДАЧ ДЛЯ ШКІЛЬНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ.

1. Довести, що в системі нумерації, основа якої є «а», подвоєне число, попереднє основі, і квадрат числа, попереднього основі, записується одними і тими ж цифрами, але в зворотному порядку.

2. Довести, що $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$

3. Довести, що дріб $\frac{14t+3}{21t+4}$ при всякому цілому значенні t нескоротний.

4. Знайти у десятковій системі трицифрове ціле число, яке, будучи написане за системою з основою 9, дає число, написане тими ж цифрами, як і шукане, але в зворотному порядку.

5. Чи існує система нумерації, в якій число 1121 є точний куб?

6. Знайти величину виразу

$$\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right), \text{ коли}$$
$$x+y+z=0.$$

7. Розв'язати систему:

$$\frac{xyz}{xy+xz+yz}=\frac{6}{11};\quad \frac{xyt}{xy+xt+yt}=\frac{4}{7};\quad \frac{xzt}{xz+xt+zt}=\frac{12}{19};$$
$$\frac{yzt}{yz+yt+zt}=\frac{12}{13}.$$

8. Розв'язати рівняння: $\frac{z^2+8(z+1)}{4(z+2)}-\sqrt{z+1}=0.$

9. Розв'язати рівняння: $\frac{\sqrt[p]{b+x}}{b}+\frac{\sqrt[p]{b+x}}{x}=c\cdot\frac{\sqrt[p]{x}}{a}.$

10. Розв'язати систему рівнянь:

$$\sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{x+y-1}=\frac{11}{2};$$
$$2x+y+\frac{1}{y}=\frac{65}{4}.$$

11. Знайти суму n членів ряду:

$$a^{\lg x}+2a^{\lg x^2}+3a^{\lg x^3}+\ldots+na^{\lg x^n}.$$

12. Звести до вигляду, зручного для логарифмування, вираз:

$$\operatorname{cosec}^2\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\beta \cdot \operatorname{cosec}^2\gamma - \operatorname{cosec}^2\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\beta - \\ - \operatorname{cosec}^2\alpha \cdot \operatorname{cosec}^2\gamma - \operatorname{cosec}^2\beta \cdot \operatorname{cosec}^2\gamma + \operatorname{cosec}^2\alpha + \\ + \operatorname{cosec}^2\beta + \operatorname{cosec}^2\gamma - 1.$$

13. Довести, що рівняння $x^2 + px + q = 0$ не має раціональних коренів, якщо p і q непарні цілі числа.

14. Спростити вираз:

$$\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4b^2}} + \sqrt{b^2 + \sqrt[3]{a^2b^4}}.$$

15. Нехай $f(x)$ є цілий відносно x многочлен з цілими коефіцієнтами. Довести, що $f(5)$ ділиться без остачі на 6, якщо $f(2)$ і $f(3)$ діляться без остачі на 6.

16. Знайти два числа, знаючи, що сума часток від ділення кожного з них на їх спільний найбільший дільник дорівнює 18 і що їх найменше кратне дорівнює 975.

17. Не шукаючи коренів x_1, x_2 рівняння $9x^2 - 24x - 20 = 0$, і скласти таке рівняння 4-го степеня, яке мало б корені:

$$x_1,\ x_2,\ \frac{1}{x_1} \text{ і } \frac{1}{x_2}.$$

18. Розв'язати рівняння $2(a^3+b^3)x^2 - 3x + (a+b) = 0$, де a і b корені рівняння: $y^2 - py + \frac{p^2-1}{2} = 0$.

19. Розв'язати рівняння:

$$\cos^2\alpha + \cos^2 x + \cos^2(\alpha + x) = 1 + 2\cos\alpha \cdot \cos(\alpha + x).$$

20. Показати, що

1) $\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$;

2) $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

21. Визначити minimum виразу $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y$ при $\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{2}$.

22. Знайти без допомоги таблиць значення виразу:

$$\cos\frac{\pi}{9} \cdot \cos\frac{2\pi}{9} \cdot \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{4\pi}{9}.$$

23. Розв'язати рівняння:

$$\frac{9\sin x - 24\sin^3 x + 16\sin^5 x}{3\cos x - 16\cos^3 x + 16\cos^5 x} = 1.$$

24. Показати, що $\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 4\alpha}+\frac{1}{\sin 8\alpha}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n\alpha}=$ $=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2^n\alpha$.

25. Довести, що вираз

$$\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\beta-\alpha)-2\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)\cos 2\alpha$$

не залежить від β.

26. а) Чи може різниця двох дробів дорівнювати їх добуткові? Якщо може, то який вигляд повинні мати ці дроби?

б) Чи може сума двох дробів дорівнювати їх добуткові? Якщо може, то який вигляд повинні мати дроби?

27. Перша цифра шестицифрового числа — одиниця. Якщо її переставити на кінець, то число збільшиться втроє. Знайти шестицифрове число.

28. Довести, що вираз

$$y=\frac{\sin^8 x}{8}-\frac{\cos^8 x}{8}-\frac{2\sin^6 x}{6}+\frac{\cos^6 x}{6}+\frac{\sin^4 x}{4}$$

не залежить від x.

29. Різниця між добутком двох чисел a і b та їх спільним найбільшим дільником d дорівнює r. Частка від ділення їх найменшого кратного на їх спільний найбільший дільник q. Довести, що $1+4rq$ — точний квадрат.

30. Дано числа a, b, c, d, e. Відомо, що числа a, b, c становлять арифметичну пропорцію; b, c, d — геометричну пропорцію; c, d, e — гармонічну пропорцію. Довести, що числа a, c, e становлять геометричну пропорцію.

31. Розв'язати рівняння:

$$x^3+(\sqrt[3]{a}-\sqrt{a})\,x+\sqrt[12]{a^7}=0$$

32. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt[5]{\frac{211}{x^5}+\frac{1}{x^4}}+\frac{\sqrt[5]{211+x}}{211}=\frac{729\sqrt[5]{x}}{13504}.$$

33. Знайти суму n членів ряду $S=8+2\cdot 89+3\times$ $\times 899+4\cdot 8999+\ldots$

34. Визначити вид трикутника ABC, в якому: $(a^3+b^3-c^3):(a+b-c)=c^2$; $\sin A\cdot\sin B=$ $=\frac{3}{4}$ (a, b, c, A, B, C — сторони і кути трикутника).

35. При яких цілих і додатних значеннях p дріб $\frac{6p+4}{p-2}$ буде цілим числом?

36. Розв'язати систему:

$$x\cdot(x+1)\cdot(3x+5y)=144;$$
$$x^2+4x+5y=24.$$

37. Визначити A і B так, щоб многочлен $x^6+Ax^5+Bx^4-2x^3+6x^2+1$ був точним квадратом іншого цілого многочлена.

38. Розв'язати рівняння: $x^5-(3-x)^5=243$.

39. Довести, що в усякому прямокутному трикутнику куб гіпотенузи більший від суми кубів катетів.

40. Визначити суму n членів $a^p+b^p+c^p+\ldots+u^p+v^p$, якщо a, b, c, ..., u, v становлять геометричну прогресію з знаменником q.

41. Розв'язати рівняння: $2\sqrt{3\sin x}=\frac{3\operatorname{tg}x}{2\sqrt{\sin x-1}}-\sqrt{3}$.

42. Перетворити даний трикутник у рівносторонній, рівновеликий даному.

43. Показати, що будь-який степінь цілого числа може бути виражений у вигляді різниці квадратів двох цілих чисел, якщо показник степеня більше двох.

44. Скільки різних дільників має число $2^2\cdot3^3\cdot4^4\cdot5^5$ і чому дорівнює їх сума?

45. Нехай a і b — цілі числа. Довести, що число a^2+b^2 ділиться на 441, якщо відомо, що воно ділиться на 21.

46. Довести, що з усіх цілих чисел виду $2p+1$, де p просте число, лише одне число є точним кубом.

47. Помічаючи, що $\sqrt{5\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}}$, знайти загальний вид чисел, які допускають подібне винесення цілого числа за знак радикала будь-якого степеня.

48. Розв'язати рівняння:

$$\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

49. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3&=6\\
x_2+x_3+x_4&=9\\
x_3+x_4+x_5&=3\\
x_4+x_5+x_6&=-3\\
x_5+x_6+x_7&=-9\\
x_6+x_7+x_8&=-6\\
x_7+x_8+x_9&=-2\\
x_8+x_1+x_2&=2
\end{aligned}$$

50. В 12 годин годинна і хвилинна стрілки співпадають. Через яку найменшу кількість часу вони співпадуть знову?

51. Поїзд проходить повз спостерігача протягом t_1 сек., а через міст, довжиною m метрів — протягом t_2 сек. Визначити швидкість і довжину поїзда.

52. Яка найбільша кількість гострих кутів може бути в опуклому многокутнику?

53. Довести, що трикутник рівнобедрений, якщо відомо, що в нього рівні:

1) дві медіани;

2) дві висоти;

3) дві бісектриси.

54. Довести, що в будь-якому чотирикутнику відрізки, що сполучають середини протилежних сторін, в точці перетину діляться пополам.

55. В даний трикутник вписати прямокутник з найменшою діагоналлю.

56. Побудувати рівносторонній трикутник, три вершини якого лежали б на трьох даних паралельних прямих.

57. Побудувати квадрат, три вершини якого лежать відповідно на трьох даних паралельних прямих.

58. Знайти геометричні місця:

1) середин рівних хорд даного кола;

2) середин хорд, що проходять через дану точку всередині кола.

59. На площині побудувати коло, рівновіддалене від чотирьох даних точок. Скільки розв'язків має задача?

60. Розкласти на цілі раціональні множники вирази:

1) $a^3 + в^3 + c^3 - 3авс$

2) $a^{10} + a^5 + 1$.

61. Довести тотожності:

1) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$; 2) $\log_a N = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b N$;

3) $\log_{ab} N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N}{\log_a N + \log_b N}$; 4) $\frac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b$.

5) Якщо $b = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \ldots b_n$, то

$$\frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\log_{b_1} a} + \frac{1}{\log_{b_2} a} + \ldots + \frac{1}{\log_{b_n} a}.$$

62. Визначити (без допомоги логарифмів), яке із чисел 21^{23} і 23^{21} більше.

63. Розв'язати рівняння:

1) $8x^3 - 20\sqrt{2}x^2 + 22x + 3\sqrt{2} = 0$
2) $x^3 + (2 + a - a^2)x^2 + (2a - a^2 - a^3)x + (a^4 - 2a^2) = 0$
3) $x^4 + 4x - 1 = 0$
4) $4x^4 + 12x^3 + 5x^2 - 6x - 15 = 0$.

64. Розв'язати рівняння:

1) $4^{x+2} + 4^{x+1} + 4^{x-1} = 3^4$;
2) $x^{\log_x 4} = 4x^2$;
3) $\log_3 x + \log_9 x = 2$;
4) $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0$
5) $x^x + 139x^{-x} - 108x^{-2x} = 32$;
6) $3^x \cdot 2^{x-1} - 3^{x-1} \cdot 2^x = 2^3 \cdot 3^2$;
7) $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$.

65. Довести співвідношення:

1) $S_1 = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

2) $S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $S_3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = S_1^2$;

4) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

66. Поділити трапецію прямими, паралельними основі, на дане число рівновеликих частин.

67. Довести, що сума віддалей якої-небудь точки, взятої всередині правильного многокутника, від всіх його сторін, є величина стала.

68. Даний опуклий чотиригранний кут перетяти площиною так, щоб в перерізі одержався паралелограм.

69. Перетяти куб площиною так, щоб в перерізі одержався правильний шестикутник.

70. Довести, що не існує многогранника, що має 7 ребер.

71. Скільки існує площин, рівновіддалених від даних чотирьох точок?

72. Спростити вирази:

1) $(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1)^3$;

2) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2\cos A \cos B \cos C$, $(A + B + C = 180°)$.

73. Довести без допомоги тригонометричних таблиць співвідношення:

1) $\operatorname{tg} 20° \cdot \operatorname{tg} 40° \cdot \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 80° = 3$;

2) $\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = 1$;

3) $\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} = -\frac{1}{2}$; 4) $\left(2\sin\frac{\pi}{16}\right)^{16} + \left(2\cos\frac{\pi}{16}\right)^{16} = 8(3217 + 1972\sqrt{2})$;

5) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

74. Довести, що якщо в трикутнику має місце співвідношення

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$$

то трикутник прямокутний, якщо ж $\sin A = 2\cos B \times \sin C$, то трикутник рівнобедренний.

75. Довести тотожності:

1) $(\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sec\alpha)^2 - (\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) = 7$;

2) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$.

76. Основою тетраедра служить трикутник, сторони якого $BC = a$, $AC = в$ і $AB = c$. Ребра тетраедра $AS = BC = a$, $CS = AB = c$ й $BS = AC = в$. Визначити об'єм тетраедра.

77. За даним ребром правильного тетраедра визначити радіус кулі, поверхня якої дотикається ребер тетраедра. Знайти також відношення радіуса цієї кулі до радіусів куль, вписаної в тетраедр і описаної навколо нього.

78. В трапеції $АВСД$, паралельні сторони якої BC і AD, діагоналі перетинаються в точці O. Площа трикутника $AOD = p^2$ і площа трикутника $BOC = q^2$. Виразити через p і q площу трапеції.

79. З усіх кругових секторів, що мають однакові периметри $2p$, знайти той, площа якого досягає максимуму.

80. Розв'язати рівняння:

$$\sin 2x - 2(2\sqrt{\sin x + \cos x} - 3)(\sin x + \cos x) - 4\sqrt{\sin x + \cos x} + 2 = 0.$$

81. Побудувати відрізок довжини $x = \sqrt[4]{авcd}$ за даними відрізками з довжинами a, $в$, c, d.

82. Віддалі трьох вершин паралелограма від певної площини дорівнюють a, $в$, c. Знайти віддаль четвертої вершини від цієї ж площини.

83. Розв'язати систему рівнянь:

$$2^{\lg x} + 3^{\lg y} = 5,$$
$$2^{\lg x} \cdot 3^{\lg y} = 4.$$

84. Довести:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 (60^\circ + \alpha) + \cos^2 (60^\circ - \alpha) = \sin^2 \alpha +$$
$$+ \sin^2 (120^\circ + \alpha) + \sin^2 (120^\circ - \alpha) = \frac{3}{2}.$$

85. Дано: $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. Обчислити: $16 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2} - \sin^2 2\alpha$.

86. Розв'язати систему рівнянь:

$$\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}},$$
$$\sqrt[4]{x^3 y} - \sqrt[4]{xy^3} = \sqrt{12}.$$

87. Розв'язати рівняння: $\sqrt[x]{9} + \sqrt[x]{6} = \sqrt[x]{4}$.

88. Знайти x, при якому $(x - a)^2 + (x - в)^2 + \ldots + (x - k)^2$ має найменше значення.

89. Розв'язати рівняння: $a^{\log \sqrt{b}\, x} - 5x^{\log_b a} + 6 = 0$.

90. Обчислити радіуси куль, дотичних до площини трикутника в трьох його вершинах і попарно дотичних між собою, якщо сторони трикутника a, $в$, c.

91. Задача Ейлера. Визначити раціональні значення x і y, що задовольняють рівняння: $x^y = y^x$.

92. Обчислити вираз: $7^{\log_{49} 5 - 0,5}$.

93. Довести, що для цілого додатного числа n, більшого 2, має місце нерівність $n^{n+1} > (n + 1)^n$.

94. Довести тотожність:

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}.$$

95. Довести, що якщо в чотирикутник можна вписати і навколо нього ж описати коло, то його площа дорівнює квадратному кореню з добутку його сторін.

96. Треба спорудити конічний намет певної місткості При якому співвідношенні висоти до радіуса основи треба буде затратити найменшу кількість матеріалу.

ВІДПОВІДІ, ВКАЗІВКИ, РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Подвоївши число $a - 1$, що передує основі a системи числення, маємо: $2(a - 1) = 2a - 2 = a + (a - 2)$; звідси видно, що $2(a - 1)$ записується за системою числення з основою a цифрами 1 і $a - 2$.

Піднісши $a - 1$ до квадрата, знаходимо: $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1 = a(a - 2) + 1$. Звідси видно, що $(a - 1)^2$ записується за системою з основою a цифрами $a - 2$ і 1, тобто тими самими цифрами, як і $2(a - 1)$, але в зворотному порядку.

2. Підносячи ліву частину до куба за формулою $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$, одержимо $\left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right)^3 = 64$, або $20 + 14 \cdot \sqrt{2} + 20 - 14 \times \sqrt{2} + 3\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})(20 - 14\sqrt{2})} \cdot 4 = 64$; $40 + 12 \times \sqrt[3]{8} = 64$; $40 + 24 = 64$.

3. Спільний дільник чисел $14t + 3$ і $21t + 4$ є також дільник числа $3(14t + 3) - 2(21t + 4) = 1$, тобто дільник є 1. Отже, чисельник і знаменник даного дробу, не маючи інших спільних дільників, крім одиниці, є числа взаємно прості, а тому цей дріб нескоротний.

4. Нехай x, y і z є відповідно цифри сотень, десятків і одиниць.

За десятковою системою шукане число запишеться так:

$$100x + 10y + z.$$

Коли записати його за системою з основою 9, тоді шукане число, за умовою, матиме вигляд: $z \cdot 9^2 + y \cdot 9 + x$, тобто маємо рівняння:

$100x + 10y + z = 81z + 9y + x$, або $100x + y - x = 80z$,

звідки

$$\frac{y-x}{10} = 8z - 10x. \qquad (1)$$

Тому що x, y і z є числа цілі, то різниця $y - x$ ділиться на 10. Але кожні з додатних чисел y і x менші за 10, отже, $y - x = 0$, звідки $y = x$. Рівняння (1) набуває вигляду: $8z - 10x = 0$, або $4z = 5x$. (2)

Тому що 4 і 5 числа взаємно прості, то x є кратне 4. Крім того, $0 < x < 10$, отже, $x = 4$, або $x = 8$. Друге значення $x = 8$ відкидаємо, бо z не може дорівнювати 10. Отже, $x = 4$, $z = 5$, $y = 4$. Число дорівнює 445.

5. Припускаючи, що основа системи, за якою написане число 1121, дорівнює x, маємо: $1121 = x^3 + x^2 + 2x + 1$. Але $x > 0$. Тому: $x^3 < x^3 + x^2 + 2x + 1 < x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, або $x^3 < 1121 < (x+1)^3$.

Ми знайшли, що при довільній основі x системи нумерації 1121 не є точний куб. Отже, немає системи нумерації, за якою 1121 є точним кубом.

6. $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 - 3(x + y + z) \times (xy + xz + yz) - 3xyz$.

Беручи до уваги, що $x + y + z = 0$, одержимо:

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} = 3.$$

Тому, що

$$\frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z} = \frac{(z-y)(z+y-x)}{yz} = \frac{2x(y-z)}{yz},$$

то

$$\left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}\right) \cdot \frac{x}{y-z} = 1 + \frac{2x^2}{yz}$$

Так само

$$\left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}\right) \cdot \frac{y}{z-x} = 1 + \frac{2y^2}{xz};$$

$$\left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}\right) \cdot \frac{z}{x-y} = 1 + \frac{2z^2}{xy}.$$

Отже, даний вираз дорівнює $3+\frac{2(x^3+y^3+z^3)}{xyz}=9$.

7. $\frac{xy+xz+yz}{xyz}=\frac{11}{6}$; $\frac{xy+xt+yt}{xyt}=\frac{7}{4}$; $\frac{xz+xt+zt}{xzt}=\frac{19}{12}$; $\frac{yz+yt+zt}{yzt}=\frac{13}{12}$;

або

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{11}{6}; \qquad (1)$$

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{7}{4}; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{19}{12}; \qquad (3)$$

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{13}{12}. \qquad (4)$$

Додаючи рівняння (1), (2), (3), (4), знайдемо:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{25}{12}. \qquad (5)$$

Віднімаючи з рівняння (5) по черзі рівняння (1), (2), (3) і (4), знайдемо x, y, z і t.

8. Перетворимо дане рівняння так:

$$\frac{z^2+8(z+1)}{4(z+1)+4}=\sqrt{z+1} \qquad (1)$$

Нехай $\sqrt{z+1}=x$, тоді $z=x^2-1$. Підставивши в (1), одержимо:

$$\frac{(x^2-1)^2+8x^2}{4x^2+4}=x,$$

або

$$x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0; \quad (x-1)^4=0; \quad x=1; \quad z=0.$$

9. $\sqrt[p]{b+x}\cdot\frac{b+x}{bx}=c\frac{\sqrt[p]{x}}{a}$, або

$$\frac{(b+x)^{1+\frac{1}{p}}}{x^{1+\frac{1}{p}}}=\frac{bc}{a}; \quad \left(\frac{b+x}{x}\right)^{1+\frac{1}{p}}=\frac{bc}{a};$$

$$\frac{b+x}{x}=\left(\frac{bc}{a}\right)^{\frac{p}{1+p}};$$

з останнього знаходимо x.

10. Приймаємо $\sqrt{x+\frac{1}{y}}=u$; $\sqrt{x+y-1}=v$, і система зводиться до такої:

$$u+v=\frac{11}{2},$$

$$u^2+v^2=\frac{65}{4}-1.$$

11. Позначимо $a^{\lg x}=z$, тоді $a^{\lg x}+2a^{\lg x^2}+3a^{\lg x^3}+ + \ldots + na^{\lg x^n}=z+2z^2+3z^3+\ldots+nz^n=y$. (1)
Помножимо обидві частини рівності (1) на z:

$$z^2+2z^3+3z^4+\ldots+nz^{n+1}=yz, \qquad (2)$$

Віднімемо з (1) (2):

$$z+z^2+z^3+\ldots+z^n-nz^{n+1}=y\,(1-z).$$

Звідси легко знайти y.

12. Даний вираз після групування і розкладу на множники легко зводиться до вигляду:

$$(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)(\operatorname{cosec}^2\beta-1)(\operatorname{cosec}^2\gamma-1)=\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\beta\operatorname{ctg}^2\gamma.$$

13. Раціональні корені рівняння $x^2+px+q=0$ (p і q — цілі числа) повинні бути цілими числами.

Тому що добуток коренів q — непарне число, за умовою, то обидва корені повинні бути непарними, тоді їх сума p буде числом парним, що суперечить умові.

14. Винесемо в першому корені $\sqrt[3]{a^4}$, а в другому $\sqrt[3]{b^4}$ за дужки:

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^4}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})}+\sqrt{\sqrt[3]{b^4}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})}=$$
$$=\sqrt{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}}\,(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})=(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^{\frac{3}{2}}.$$

15. Якщо $f(x)-f(2)=0$, при $x=2$, то

$$f(x)-f(2)=(x-2)\,\varphi(x), \qquad (1)$$

де $\varphi(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами; покладаючи у рівності (1) $x=5$, одержимо: $f(5)-f(2)=3\varphi(5)$.
Тому що права частина цієї рівності кратна 3 і, за умовою, $f(2)$ кратна 6, то $f(5)$ кратна 3. Розглядаючи $f(x)-f(3)$ точно так, доведемо, що $f(5)$ кратна 2, отже, $f(5)$ кратна 6.

16. Нехай шукані числа є x і y, а їх спільний найбільший дільник d, тоді $x = dx_1$, і $y = dy_1$. Найменше кратне шуканих чисел $dx_1y_1 = 975$, причому x_1 і y_1 — числа взаємно прості. За умовою $\frac{x}{d} + \frac{y}{d} = 18$, тобто $x_1 + y_1 = 18$. Число 18 розкладається на такі взаємно прості числа: $1 + 17 = 5 + 13 = 7 + 11$. Але 975 повинне ділитися на добуток x_1y_1, тому $x_1 + y_1 = 5 + 13$; звідки: $x_1 = 5$; $y_1 = 13$; $d = 15$; $x = 5 \cdot 15 = 75$; $y = 15 \cdot 13 = 195$.

17. Шукане рівняння:

$$(x - x_1)(x - x_2)\left(x - \frac{1}{x_1}\right)\left(x - \frac{1}{x_2}\right) = 0.$$

Залишається перемножити двочлени у лівій частині і взяти до уваги, що $x_1 + x_2 = \frac{24}{9}$; $x_1 \cdot x_2 = -\frac{20}{9}$.

Друге розв'язування.

Легко довести, що коли x_1 і x_2 є корені рівняння $ax^2 + вx + c = 0$, то $\frac{1}{x_1}$ і $\frac{1}{x_2}$ будуть коренями рівняння: $cx^2 + вx + a = 0$.

Отже, шукане рівняння:

$$(9x^2 - 24x - 20)(20x^2 + 24x - 9) = 0$$

18. З першого рівняння знаходимо:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8(a^3 + b^3)(a + b)}}{4(a^3 + b^3)}.$$

З другого рівняння знаходимо:

$$a + b = p; \quad ab = \frac{p^2 - 1}{2}.$$

Далі:

$$a^3 + b^3 = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = \frac{p(3 - p^2)}{2}.$$

Підставивши значення $a^3 + в^3$ і $a + в$ у формулу для x і зробивши перетворення, знайдемо:

$$x_1 = \frac{p}{3 - p^2}, \quad x_2 = \frac{1}{p}.$$

19. Ліву частину рівняння можна перетворити таким способом:

$$\cos^2\alpha + \cos^2 x + \cos^2(\alpha + x) = \frac{1 + \cos 2\alpha + 1 + \cos 2x}{2} +$$
$$+ \cos^2(\alpha + x) = 1 + \cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x) + \cos^2(\alpha + x) =$$
$$= 1 + \cos(\alpha + x)[\cos(\alpha - x) + \cos(\alpha + x)] =$$
$$= 1 + 2\cos(\alpha + x)\cos\alpha\cos x.$$

Дальший хід розв'язування зрозумілий.

20. $\frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$; звідки $\sin\frac{7\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8}$;

$$\sin\frac{5\pi}{8} = \sin\frac{3\pi}{8};$$

тому

$$\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8} = 2\left(\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8}\right).$$

Але $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ і, отже, $\sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8}$, а тому

$$2\left(\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8}\right) = 2\left(\sin^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$= 2\left[\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}\right] =$$

$$= 2 - \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

Таким самим способом доводять справедливість другої рівності.

21. $$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = \frac{\sin^2 x + \sin^2 y - 2\sin^2 x \sin^2 y}{1 - \sin^2 x - \sin^2 y + \sin^2 x \sin^2 y} =$$

$$= \frac{\frac{3}{2} - 2\sin^2 x \sin^2 y}{1 - \frac{3}{2} + \sin^2 x \sin^2 y} = -2 + \frac{1}{2\sin^2 x \sin^2 y - 1}.$$

Останній вираз буде minimum при maximum'і добутку $\sin^2 x \sin^2 y$. Тому що $\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{2}$, то maximum $\sin^2 x \sin^2 y$ буде при $\sin^2 x = \sin^2 y = \frac{3}{4}$. Отже, шуканий minimum є

$$-2 + \frac{1}{2 \cdot \frac{9}{16} - 1} = 6.$$

22. $$\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos\frac{\pi}{9}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{9}\right); \quad \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{9}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} - \cos\frac{2\pi}{8}\right).$$

Тому даний вираз зводиться до такого вигляду;

$$\frac{1}{8}\left(1+2\cos\frac{\pi}{9}\right)\left(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{1}{8}\left(1+2\cos\frac{\pi}{9}\right)\times$$
$$\times\left(1+\cos\frac{\pi}{9}-2\cos^2\frac{\pi}{9}\right)=\frac{1}{8}\left[1-\left(4\cos^3\frac{\pi}{9}-3\cos\frac{\pi}{9}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{8}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{16}.$$

23. Наше рівняння можна перетворити так:

$$\frac{\sin x+3\sin x-4\sin^3 x+5\sin x-20\sin^3 x+16\sin^5 x}{\cos x-3\cos x+4\cos^3 x+5\cos x-20\cos^3 x+16\cos^5 x}=1;$$

або

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=1;\quad \operatorname{tg}3x=1 \text{ і т. д.}$$

24. $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha}+\operatorname{ctg}2\alpha$, звідки

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha;$$
$$\frac{1}{\sin 4\alpha}=\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{ctg}4\alpha;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{\sin 2^n\alpha}=\operatorname{ctg}2^{n-1}\alpha-\operatorname{ctg}2^n\alpha.$$

Додавши почленно одержані рівності, будемо мати у правій частині: $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2^n\alpha$.

25. $\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\beta-\alpha)-2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)\times$
$\times\cos 2\alpha=\frac{2-\cos(2\alpha+2\beta)-\cos(2\beta-2\alpha)}{2}-(\cos 2\alpha-$
$-\cos 2\beta)\cos 2\alpha=1-\cos 2\alpha\cos 2\beta-(\cos 2\alpha-$
$-\cos 2\beta)\cos 2\alpha=1-\cos^2 2\alpha=\sin^2 2\alpha.$

26. Маємо два нескоротних дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$, за умовою

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \text{ або } \frac{ad-bc}{bd}=\frac{ac}{bd};$$

звідки:

$$ad-bc=ac.$$

З останньої рівності можна одержати такі дві рівності:

$$ad = c\ (a + в); \qquad (1)$$
$$вc = a\ (d - c). \qquad (2)$$

Через те що дроби $\frac{a}{в}$ і $\frac{c}{d}$ нескоротні, то з рівності (1) випливає, що c є дільник a, з рівності (2) виявляється, що a є дільник c. Отже, $a = c$ і $d = a + в$. Звідси вимоги питання задовольняють такі дроби:

$$\frac{a}{b} \text{ і } \frac{a}{a+b}.$$

Такими ж міркуваннями знайдемо, що вимоги другого питання задовольняють дроби

$$\frac{a}{b} \text{ і } \frac{a}{a-b}.$$

27. Задача зводиться до розв'язування рівняння $3(100\,000 + x) = 10x + 1$, де x — число, утворене останніми 5 цифрами шуканого числа.

28. Після зведення до спільного знаменника одержуємо:

$$y = \frac{1}{24}(3\sin^8 x - 3\cos^8 x - 8\sin^6 x + 4\cos^6 x + 6\sin^4 x); \qquad (1)$$

$\cos^8 x = (1 - \sin^2 x)^4 = 1 - 4\sin^2 x + 6\sin^4 x - 4\sin^6 x + \sin^8 x$; $\cos^6 x = (1 - \sin^2 x)^3 = 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x$.

Підставивши значення $\cos^8 x$ і $\cos^6 x$ в рівність (1), одержуємо:

$$y = \frac{1}{24}.$$

29. $1 + 4rq = 1 + 4\,(aв - d)q$.

Відомо, що добуток найбільшого спільного дільника на найменше спільне кратне двох чисел дорівнює добуткові цих чисел, тобто $pd = aв$ (p — найменше кратне). З останньої ріності маємо

$$p = \frac{ab}{d}, \text{ а тому } q = \frac{ab}{d^2}.$$

Підставивши значення q в рівність (1), одержуємо:

$$1 + 4rq = 1 + 4\,(ab - d)\frac{ab}{d^2} = 1 + 4\left(\frac{ab}{d}\right)^2 - 4\frac{ab}{d} =$$
$$= \left(1 - \frac{2ab^2}{d}\right).$$

30. За умовою:

$$1)\ a+c=2b;\ 2)\ c^2=bd;\ 3)\ \frac{1}{c}+\frac{1}{e}=\frac{2}{d}.$$

Поділивши почленно (1) рівність на (2), одержуємо:

$$\frac{a+c}{c^2}=\frac{2}{d}. \qquad (4)$$

З рівностей (3) і (4) випливає:

$$\frac{a+c}{c^2}=\frac{1}{c}+\frac{1}{e},$$

або

$$\frac{a}{c^2}+\frac{1}{c}=\frac{1}{c}+\frac{1}{e};\quad \frac{a}{c^2}=\frac{1}{e},$$

Звідки $c^2=ae$.

31. $x^3+(\sqrt[3]{a}-\sqrt{a})\,x+\sqrt[12]{a^7}=x^3+x\sqrt[3]{a}-x\sqrt{a}+$
$+\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=x(x^2-\sqrt{a})+\sqrt[3]{a}(x+\sqrt[4]{a})=$
$=(x+\sqrt[4]{a})(x^2-x\sqrt[4]{a}+\sqrt[3]{a})=0$ і т. д.

32. Див. задачу № 9.

33. Даний ряд можна представити так:

$$S=9-1+2\cdot 90-2+3\cdot 900-3+\ldots+n\cdot 9\cdot 10^{n-1}-$$
$$-n=9(1+2\cdot 10+3\cdot 100+\ldots+n\cdot 10^{n-1})-$$
$$-(1+2+3+\ldots+n).$$

Якщо позначимо ряд у дужках $(1+2\cdot 10+\ldots+n\times\times 10^{n-1})$ буквою S_1, то $S_1-10S_1=-9S_1=1+10+$
$+10^2+\ldots+10^{n-1}-n\cdot 10^n$;

$$9S_1=n\,10^n-\frac{10^n-1}{9}.$$

(Для виразу $1+10+10^2+\ldots+10^{n-1}$ застосовуємо формулу суми членів геометричної прогресії).

Отже,

$$S=n\cdot 10^n-\frac{10^n-1}{9}-\frac{(n+1)\,n}{2}=\frac{10^n\cdot(9n-1)}{9}-\frac{(n+1)\,n}{2}.$$

34. За умовою $a^3+b^3-c^3=(a+b-c)\,c^2$, а тому

$$a^3+b^3-c^3=(a+b)\,c^2-c^3;\quad a^3+b^3=(a+b)\,c^2.$$

Поділивши обидві частини на $a+b$ $(a+b \neq 0)$, одержимо:

$$a^2 - ab + b^2 = c^2.$$

Але $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; отже, $a^2 - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

$$\cos C = \frac{1}{2}; \quad C = 60^\circ \ (C \text{ — кут трикутника}).$$

$$\sin A \cdot \sin B = \frac{3}{4}; \quad \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = \frac{3}{4}; \quad (1)$$

$$\cos(A+B) = -\cos C = -\frac{1}{2}.$$

Підставивши в (1), маємо:

$$\cos(A-B) = 1; \quad A - B = 0; \quad A = B.$$

Отже, трикутник рівносторонній.

35. Поділивши $6p+4$ на $p-2$, одержимо:

$$\frac{6p+4}{p-2} = 6 + \frac{16}{p-2}.$$

Дріб буде цілим числом, якщо $\frac{16}{p-2}$ буде цілим, а це можливо, коли $p-2 = 1, 2, 4, 8, 16$. Отже, $\frac{6p+4}{p-2}$ буде цілим числом при таких значеннях p: 3, 4, 6, 10, 18.

36. $(x^2+x)(3x+5y) = 144$; $(x^2+x) + (3x+5y) = 24$ і т. д.

37. $x^6 + Ax^5 + Bx^4 - 2x^3 + 6x^2 + 1 = (x^3 + ax^2 + в)^2$. Підносячи праву частину до квадрата і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, знайдемо $A = -6$; $B = 9$.

38. Поклавши $x = 3y$, зводимо дане рівняння до вигляду:

$$3^5 \cdot y^5 - 3^5(1-y)^5 = 3^5, \text{ або } y^5 - 1 - (y-1)^5 = 0$$

Після винесення $y-1$ за дужки, одержимо:

$(y-1)\ [(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) + (y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1)] = 0;$

або $(y-1)(2y^4 - 3y^3 + 7y^2 - 3y + 2) = 0$

Останнє рівняння розпадається на два, а саме: на рівняння $y-1=0$, що дає розв'язки $y=1$, $x=3$, і на друге — симетричне:

$$2y^4 - 3y^3 + 7y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння, одержимо ще 4 корені.

39. Позначаючи довжини катетів і гіпотенузи через a, $в$, c і помічаючи, що числа $\frac{в}{c}$ і $\frac{a}{c}$ є правильні дроби, знаходимо:

$$\left(\frac{b}{c}\right)^3 < \left(\frac{b}{c}\right)^2; \quad \left(\frac{a}{c}\right)^3 < \left(\frac{a}{c}\right)^2.$$

Додавши ці нерівності, одержимо:

$$\frac{b^3}{c^3} + \frac{a^3}{c^3} < \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2},$$

або

$$\frac{b^3 + a^3}{c^3} < \frac{b^2 + a^2}{c^2}.$$

Але $\frac{b^2 + a^2}{c^2} = 1$, отже, $\frac{b^3 + a^3}{c^3} < 1$, або $c^3 > a^3 + b^3$.

40. $a^p + b^p + c^p + \ldots + u^p + v^p = a^p + (aq)^p + (aq^2)^p + \ldots + (aq^{n-1})^p = a^p (1 + q^p + q^{2p} + \ldots + q^{(n-1)p})$.

Але ряд у дужках становить геометричну прогресію з знаменником q^p.

41. Після звільнення від знаменника і ділення на $\sqrt{3}$, рівняння зводиться до вигляду:

$$4 \sin x \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x,$$

або

$$2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x;$$

$$\sin 2x = \sin (x + 30^\circ).$$

42. Через одну з вершин A трикутника ABC проводимо пряму під кутом 60° до основи AC до перетину в точці B_1 з прямою, що проходить через вершину B, і паралельно основі AC. Через те що трикутники BAC і B_1AC рівновеликі і кут $B_1AC = 60^\circ$, то на підставі теореми про відношення площ трикутників, які мають по одному рівному куту, сторона шуканого трикутника буде середнім пропорціональним між відрізками AB_1 і AC.

43. Згідно умови маємо:

$$m^{n+2} = \left(\frac{m^{n+1} + m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m^{n+1} - m}{2}\right)^2.$$

44. Дільники даного числа співпадають з членами добутку $(1+2+2^2)(1+3+3^2+3^3)(1+4+4^2+4^3+4^4)(1+5+5^2+5^3+5^4+5^5)$, тому кількість їх дорівнює кількості членів вказаного добутку, тобто $4\cdot4\cdot5\cdot6=360$, а сума — самому добутку, рівному

$$\frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{3^4-1}{3-1}\cdot\frac{4^5-1}{4-1}\cdot\frac{5^6-1}{5-1}=372944880.$$

45. Якщо $a^2+в^2$ ділиться на 3, то числа a і $в$ кожне ділиться на 3 і отже $a^2+в^2$ ділиться на 3^2. Теж саме справедливо для 7, тому із подільності $a^2+в^2$ на $21=3\cdot7$ слідує подільність $a^2+в^2$ на $21^2=441$.

46. З рівняння

$$2p+1=(2x+1)^3$$

слідує, що $p=x(4x^2+6x+3)$
і так як $4x^2+6x+3>1$ при $x>0$, то $x=1$, отже

$$p=13 \text{ і } 2p+1=27=3^3.$$

47. Нехай, згідно умови задачі

$$\sqrt[n]{x+\frac{y}{z}}=x\sqrt[n]{\frac{y}{z}},$$

де $\frac{y}{z}$ нескоротна дріб; підносячи обидві частини цього рівняння до n-го степеня, маємо $xz+y=x^ny$, отже, $x=ку$, звідки $кz+1=к^ny^n$, що можливо лише при $к=1$. Тоді $z=y^n-1$ і шукане число має вид

$$y+\frac{y}{y^n-1}.$$

Справді,

$$\sqrt[n]{y+\frac{y}{y^n-1}}=y\sqrt[n]{\frac{y}{y^n-1}}.$$

Покладаючи $n=2$ і $y=5$, одержуємо вказане на початку співвідношення.

48. Перепишемо дане рівняння в такому вигляді

$$\left(\frac{x-a}{bc}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{x-b}{ac}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+$$
$$+\left(\frac{x-c}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0,$$

або $(x-a-b-c)\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}\right)=0$. Якщо вираз в других дужках не дорівнює нулеві, то $x=a+b+c$, якщо ж він дорівнює нулеві, то рівняння перетворюється в тотожність.

49. $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\ x_4=4;$
$x_5=-4,\ x_6=-3,\ x_7=-2,\ x_8=-1.$

50. Вважаючи рух стрілок рівномірним (насправді вони рухаються стрибками), робимо висновок, що велика стрілка рухається в 12 разів швидше маленької. Далі зрозуміло, що якщо до зустрічі маленька стрілка пройшла x хвилин циферблата, то велика стрілка пройшла $60+x$ хвилин, тому

$$60+x=12x,\quad x=\frac{60}{11}.$$

Перша зустріч стрілок після 12 годин відбудеться через $5\frac{5}{11}$ хвилин.

51. Якщо v — швидкість поїзда і l — його довжина, то

$$vt_1=l,\quad vt_2=m+l,$$

звідки

$$v=\frac{m}{t_2-t_1},\ l=\frac{mt_1}{t_2-t_1}.$$

52. Відомо, що сума зовнішніх кутів опуклого многокутника дорівнює $4d$. Тому в опуклому многокутнику не може бути більше трьох гострих кутів, бо сума зовнішніх кутів була б більшою $4d$.

53. 1) Нехай дано трикутник ABC і рівні його медіани AE і BD, тоді $AD=DC$ і $BE=CE$. Нехай O — точка перетину медіан, тоді $DO=OE=\frac{1}{3}BD=\frac{1}{3}AE$ і $AO=BO=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}AE$. Очевидно, що $\triangle ADO=\triangle BOE$, отже $AD=BE$, але $DC=AD$, а $CE=BE$, звідси $AC=BC$, тобто трикутник ABC рівнобедрений.

2) Вказівка. Порівнявши два вирази для площі трикутника ABC, одержимо твердження.

3) Нехай дано трикутник ABC і рівні бісектриси AM і BN. Із середин AM і BN проведемо до них перпендикуляри, які перетнуться в точці O. Із O як центра опишемо коло радіуса $OA=OB$, яке пройде через точки M і N. Кути A і B даного трикутника, як вписані і що спираються на одну й ту ж дугу, рівні і, отже, трикутник ABC рівнобедрений.

54. Вказівка. Довести спочатку, що при сполученні відрізками середин сторін будь-якого чотирикутника одержується паралелограм.

55. Вказівка. Загальний випадок зводиться до випадку прямокутного трикутника, один із катетів якого співпадає з основою даного трикутника, на якому лежить основа прямокутника, який треба вписати, а другий катет дорівнює висоті даного трикутника. Для вказаного прямокутного трикутника одна із діагоналей шуканого прямокутника співпадає з висотою, опущеною з вершини прямого кута на гіпотенузу.

56. Вказівка. Скористатися слідуючим: якщо D — одна із точок перетину даних прямих і кола, описаного навколо трикутника ABC, то кут з вершиною D і сторонами, що проходять через ті точки A, B, C, які не лежать з D на одній із даних прямих, дорівнює 60°.

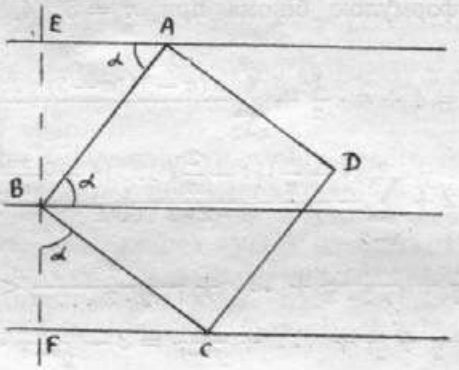

Рис. 52.

57. Припустивши, що задача розв'язана, доводимо рівність прямокутних трикутників ABE і BCF (за гіпотенузою і гострим кутом, див. рис. 52), звідки випливає, що $AE = BF$ і $CF = BE$. Отже, для розв'язання задачі треба виконати таку побудову: проводимо перпендикуляр EF до даних паралельних прямих і відкладаємо від точки E відрізок $EA = BF$ і від точки F відрізок $FC = BE$. Тоді

точки A, B і C будуть вершинами шуканого квадрата. Побудова завжди можлива і єдина.

Взагалі дані прямі ділять в певному відношенні (внутрішнім чи зовнішнім чином) діагоналі шуканого квадрата, вершини якого лежать на різних даних прямих. Це дозволяє застосувати метод подібності. Задача допускає взагалі шість розв'язків, попарно симетричних. Два з них співпадають, якщо дві прямі рівновіддалені від третьої.

58. 1) Коло, концентричне з даним.

2) Коло, що спирається як на діаметр на відрізок, що сполучає центр даного кола з даною точкою.

59. Шукані кола являються концентричними до кіл, описаних навколо трьох із даних точок. Якщо ніякі з цих точок не лежать на одній прямій, то задача має чотири або один розв'язок. Якщо ж три або всі чотири дані точки лежать на одній прямій, то розв'язків три.

60. 1) $(a+в+c)(a^2+в^2+c^2-aв-вc-ca)$.

2) $(a^2+a+1)(a^8-a^7+a^5-a^4+a^3-a+1)$.

62. За формулою бінома при $n=3, 4, 5,\ldots$ маємо

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\sum_{k=2}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\times$$

$$\times\frac{1}{n^k}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{1\cdot2\cdot3\ldots k}<2+$$

$$+\frac{1}{2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots n}<2+$$

$$+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

Отже, якщо $n=3,4\ldots$, то $n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, звідки

$$n^2>\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n>\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\frac{(n+2)^n}{n^n} \text{ або } n^{n+2}>(n+2)^n$$

Покладаючи $n=21$, маємо

$$21^{23}>23^{21}$$

63. Вказівка. Ліву частину рівнянь представити відповідно у вигляді:

1) $(2x - 3\sqrt{2})(4x^2 - 4\sqrt{2}\,x - 1)$;
2) $(x - a^2 + 2)(x^2 + ax - a^2)$;
3) $(x^2 + x\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2})(x^2 - x\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2})$;
4) $y^2 - 2y + 15$, де $y = 2x^2 + 3x$.

64. 1) $x = 1$. 2) $x = \frac{3}{2}$. 3) $x = 3\sqrt[3]{3}$.

4) $x_1 = a^{-\frac{4}{3}}$, $x_2 = a^{-\frac{1}{2}}$.

Вказівка. Скористатися співвідношенням $\log_n m \times \times \log_m n = 1$ і покласти $\log_a x = y$.

5) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. (Покласти $x^x = y$)

6) $x = 3{,}3887$.

7) $x = 0$. Вказівка. Розділити обидві частини рівняння на 27^x.

65. Вказівка. 2) Додати почленно рівності $(\kappa + 1)^3 = = \kappa^3 + 3\kappa^2 + 3\kappa + 1$, взяті для $\kappa = 0, 1, 2, \ldots, (n + 1)$;

3) Теж саме для $(\kappa + 1)^4 = \kappa^4 + 4\kappa^3 + 6\kappa^2 + 4\kappa + 1$;

4) Додати до шуканої суми $2^3 + 4^3 + \ldots + (2n)^3 = = 8S_3$.

66. Вказівка. Задача зводиться до поділу в даному відношенні трикутника, одержаного продовженням бічних сторін даної трапеції.

67. Вказівка. Представити площу даного правильного многокутника як суму площ трикутників з спільною вершиною в точці O, яка лежить всередині многокутника.

68. Кожна грань даного кута є площина. Протилежні грані перетинаються по двом прямим, що проходять через вершину чотиригранного кута. Будь-яка площина, яка паралельна цим двом прямим, буде давати в перерізі паралелограм.

70. Насамперед переконуємося, що якщо хоч одна грань многогранника не є трикутник, то кількість всіх ребер більше 7. Якщо ж многогранник має p граней, кожна з яких є трикутник, то кількість всіх ребер дорівнює $\frac{3p}{2}$, тому p парне, тобто має вид $p = 2n$ і число ребер дорівнює $3n \neq 7$. Отже, не існує многогранника, що має 7 ребер.

71. Якщо всі точки не лежать на одній площині і ніякі три не лежать на одній прямій, то кількість шуканих площин дорівнює 4.

72. 1) $-27 \sin^6 \alpha \cos^6 \alpha$. Вказівка. Розкласти $\sin^6 \alpha + + \cos^6 \alpha$ на множники.

2) 2. Вказівка. Замінити C через $180° - (A + B)$.

73. 1) Вказівка. Виходити з тотожності:

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha},$$

поклавши $\alpha = 20°$ і застосовуючи формули на тангенс суми.

2) Вказівка. Виходити з рівності:

$$\sin 30° - \sin 10° = 2\cos 20° \cdot \sin 10°.$$

3) Розв'язування. $\operatorname{Cos}\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} =$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)\cos\frac{\pi}{5} = -2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5} =$$

$$= -\frac{2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{10}} = -\frac{2\sin\frac{\pi}{5}\cdot\cos\frac{\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{10}} =$$

$$= -\frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{10}} = \frac{-\cos\frac{\pi}{10}}{2\cos\frac{\pi}{10}} = -\frac{1}{2}.$$

4) Вказівка. Застосовуючи формули: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, знаходимо: $2\sin\frac{\pi}{16} =$

$$= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},\ 2\cos\frac{\pi}{16} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

5) Скористатися формулою:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha}.$$

74. Якщо $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$, то

$$\cos^2 A + \cos^2 B = 1 - \cos^2 C = \sin^2(A + B) = \\ = (\sin A\cos B + \cos A\sin B)^2,$$

звідки слідує співвідношення $2\cos^2 A\cos^2 B - 2\sin A\sin B\cos A\cos B = 0$, тобто $\cos A\cos B\cos(A + B) = 0$, звідки одержуємо, що або $A = 90°$, або $B = 90°$, або $A + B + C = 90°$. Якщо $\sin A = 2\cos B\sin C$, то через те що $\sin C = \sin(A + B)$ ми одержимо: $2\cos B(\sin A\cos B +$

$+ \cos A \sin B) - \sin A = 0$, тобто $\sin A\,(2\cos^2 B - 1) + \cos A \sin 2B = 0$, тобто $\sin A \cos 2B + \cos A \sin 2B = 0$, звідки $\sin(A + 2B) = 0$, звідки $A + 2B = 180° = A + B + C$, звідки $B = C$.

75. Вказівка. 1) Виразити всі тригонометричні функції через $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

2) Згрупувати по два вирази і застосувати формули на суму і різницю синусів.

3) Скористатися формулою

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

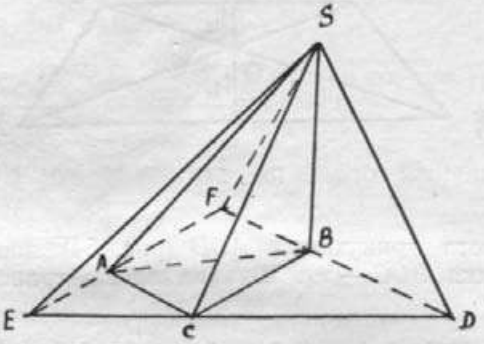

Рис. 53.

76. Через вершини основи $\triangle ABC$ (рис. 53) проведемо прямі, паралельні протилежним сторонам, і вершини D, E і F утвореного трикутника сполучимо з точкою S прямими SD, SE і SF. Об'єм тетраедра $SABC = \frac{1}{4}$ об'єму тетраедра $SDEF$. У тетраедрі $SDEF$ бічні ребра взаємно перпендикулярні. Наприклад, $SE \perp SD$, бо коло, описане навколо трикутника SED, має центр у точці C ($EC = CD = SC = AB = c$). Приймаючи в тетраедрі $SDEF$ за основу грань SDE, одержимо для його об'єму формулу:

$$\frac{SD \cdot SE \cdot SF}{6}. \text{ Отже, об'єм } SABC = \frac{SD \cdot SE \cdot SF}{24}. \quad (1)$$

З прямокутних трикутників SDE, SEF і SDF маємо: $SD^2 + SE^2 = 4c^2$; $SE^2 + SF^2 = 4a^2$; $SF^2 + SD^2 = 4b^2$.

Звідси знаходимо SD, SE і SF.

Підставивши їх значення у формулу (1), одержимо:

об'єм $SABC = \frac{1}{12}\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$.

77. Вказівка. Треба сполучити середину A ребра SM тетраедра з центром його O. Куля описана з O радіусом AO, дотикається всіх ребер тетраедра. Треба провести висоту SK тетраедра і розглянути подібні трикутники SAO і SMK.

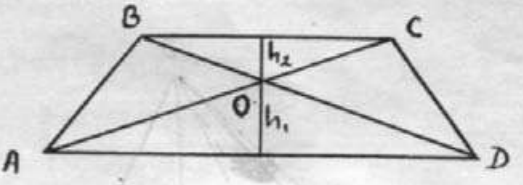

Рис. 54.

78. Висота трикутника AOD (рис. 54) дорівнює h_1, а трикутника BOC — h_2. Шукана площа трапеції $ABCD$ буде:

$$\frac{AD+BC}{2}(h_1+h_2) = p^2+q^2+\frac{AD\cdot h_2+BC\cdot h_1}{2}.$$

З подібності трикутників AOD і BOC випливає: $AD\cdot h_2 = BC\cdot h_1$.

Отже, $S_{ABCD} = p^2+q^2+AD\cdot h_2$ (1). З другого боку, з подібності тих самих трикутників маємо: $p^2 : q^2 = AD^2 : BC^2$,

$$\text{звідки: } AD = \frac{BC\cdot P}{q}. \qquad (2)$$

Помноживши обидві частини рівності (2) на h_2 і враховуючи, що $BC\cdot h_2 = 2q^2$, маємо: $AD\cdot h_2 = 2pq$. Підставивши останнє у рівність (1), знайдемо: $S_{ABCD} = p^2+q^2+2pq = (p+q)^2$.

79. Позначимо радіус сектора буквою R і довжину його дуги буквою l, тоді, згідно з умовою:

$$2R + l = 2p. \qquad (1)$$

Площа сектора $S = R\frac{l}{2}$. Оскільки з рівності (1) випливає, що $R + \frac{l}{2} = p$, де p — стала величина, то добуток $R\frac{l}{2}$ досягає максимуму, коли $R = \frac{l}{2} = \frac{p}{2}$ і $l = p = 2R$, тобто кут між крайніми радіусами дорівнює двом радіанам.

80. Приймемо $\sqrt{\sin x + \cos x} = z$. Тоді $\sin x + \cos x = z^2$,

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 = z^4.$$

Отже, дане рівняння набуває такого вигляду:

$z^4 - 1 - 2(2z - 3)z^2 - 4z + 2 = 0$; або $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 = 0$;

звідки: $(z - 1)^4 = 0$; $z = 1$. $\sqrt{\sin x + \cos x} = 1$;

$$\sin x + \cos x = 1.$$

Помноживши обидві частини останнього рівняння на $\frac{\sqrt{2}}{2}$, одержимо:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ або } \sin x \cos 45° + \cos x \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

звідки: $\sin(x + 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і т. д.

81. Вказівка. $x = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}$.

82. Припустимо, що віддалі вершин паралелограма A, B, C (рис. 55) від площини P відповідно дорівнюють a, $в$, c.

Позначимо віддаль 4-ої вершини D від площини P буквою x. Спроектуємо на площину P точку O перетину діагоналей даного паралелограма. OO_1 буде середньою лінією двох трапецій ACC_1A_1 і BDD_1B_1. Отже, $OO_1 = \frac{a + c}{2} = \frac{в + x}{2}$.

З останньої рівності одержуємо $x = a + c - в$.

83. Вказівка. $2^{\lg x}$ і $3^{\lg y}$ можна розглядати як корені квадратного рівняння $z^2 - 5z + 4 = 0$.

84. Позначимо

$$\cos^2\alpha + \cos^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha) = m$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2(120^\circ + \alpha) + \sin^2(120^\circ - \alpha) = n,$$

$$\sin(120^\circ + \alpha) = \sin(60^\circ - \alpha), \quad \sin(120^\circ - \alpha) = \sin(60^\circ + \alpha).$$

Отже, $n = \sin^2\alpha + \sin^2(60^\circ - \alpha) + \sin^2(60 + \alpha)$.

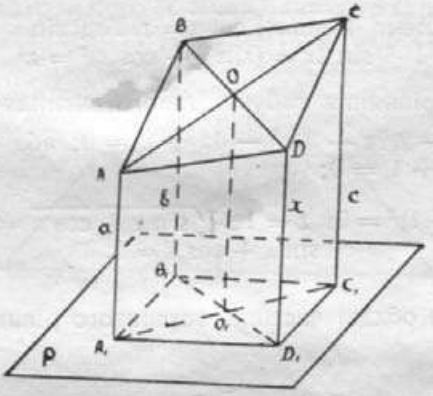

Рис. 55.

Тепер знайдемо суму і різницю виразів m і n.

$$m + n = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + [\sin^2(60^\circ - \alpha) + \cos^2(60^\circ - \alpha)] + [\sin^2(60^\circ + \alpha) + \cos^2(60^\circ + \alpha)] = 3.$$

$$m - n = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2(60^\circ - \alpha) - \sin^2(60^\circ - \alpha) + \cos^2(60^\circ + \alpha) - \sin^2(60^\circ + \alpha) = \cos 2\alpha + \cos(120^\circ - 2\alpha) + \cos(120^\circ + 2\alpha) = \cos 2\alpha + 2\cos 120^\circ \cos 2\alpha = \cos 2\alpha - \cos 2\alpha = 0.$$

Розв'язуючи систему $m + n = 3$ і $m - n = 0$, знайдемо

$$m = n = \frac{3}{2}.$$

85. $2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{3\alpha}{2} = \cos\alpha - \cos 2\alpha.$

Тому: $16\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin^2 2\alpha = 8(\cos\alpha - \cos 2\alpha) - 4\cos^2\alpha\sin^2\alpha = 8\cos\alpha - 8(2\cos^2\alpha - 1) - 4\cos^2\alpha(1 - \cos^2\alpha) = 8\cdot\frac{3}{4} - 8\left(2\cdot\frac{9}{16} - 1\right) - 4\cdot\frac{9}{16}\left(1 - \frac{9}{16}\right) = 4\frac{1}{64}.$

86. З першого рівняння маємо

$$x - y = 7 \qquad (1)$$

В лівій частині другого рівняння винесемо за дужки

$$\sqrt[4]{xy}: \ \sqrt[4]{xy} \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{12}. \qquad (2)$$

Поділивши (1) на (2), одержуємо:

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt[4]{xy}} = \frac{7}{\sqrt{12}}, \text{ або } \sqrt[4]{\frac{x}{y}} + \sqrt[4]{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{12}}. \qquad (3)$$

Позначимо $\sqrt[4]{\frac{x}{y}} = z$, тоді рівняння (3) зводиться до квадратного щодо z і т. д.

87. Поділивши обидві частини рівняння на $\sqrt[x]{4}$, одержимо:

$$\sqrt[x]{\frac{9}{4}} + \sqrt[x]{\frac{3}{2}} = 1, \text{ або } \left(\sqrt[x]{\frac{3}{2}}\right)^2 + \sqrt[x]{\frac{3}{2}} - 1 = 0 \text{ і т. д.}$$

88. Для розв'язування цієї задачі розглянемо спочатку питання про minimum тричленів $x^2 + px + q$ і $ax^2 + вx + c$ при дійсних значеннях x.

Перетворимо перший тричлен, виділивши точний квадрат:

$$x^2 + px + q = x^2 + px + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} =$$
$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Вираз $q - \frac{p^2}{4}$ є стала величина, отже, тричлен $x^2 + px + q$ досягає мінімуму при найменшому значенні виразу $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$. При дійсному x вираз $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \geqslant 0$.

Отже, найменше значення виразу є $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$, звідки $x = -\frac{p}{2}$. Розглянемо те саме питання для тричлена $ax^2 + вx + c$, коли $a > 0$.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

З останнього виразу видно, що тричлен досягає мінімуму при найменшому значенні виразу $\left(x + \frac{в}{2a}\right)^2$. Але найменше значення $\left(x + \frac{в}{2a}\right)^2$ є нуль. Отже, $\left(x + \frac{в}{2a}\right)^2 = 0$, звідки $x = -\frac{в}{2a}$. Тепер розв'яжемо дану задачу. Припустимо, що в заданій сумі n доданків, тоді $(x - a)^2 + (x - в)^2 + \ldots + (x - к)^2 = nx^2 - 2(a + в + \ldots + к)x + (a^2 + в^2 + \ldots + к^2)$.

Останній вираз є квадратний тричлен, в якому $a = n$, $в = -2(a + в + \ldots + к)$. Цей тричлен має мінімум при $x = \frac{a + в + \ldots + k}{n}$, тобто вираз $(x - a)^2 + (x - в)^2 + \ldots + (x - к)^2$ має мінімум, якщо x дорівнює середньому арифметичному інших членів біномів цього виразу.

89. Спочатку доведемо, що $a^{\log_c b} = в^{\log_c a}$. Справді, логарифмуючи обидві частини цієї рівності при основі c, одержуємо:

$$\log_c в \cdot \log_c a = \log_c a \cdot \log_c в.$$

Користуючись цією властивістю, можна дане рівняння перетворити так,

$$x^{\log_{\sqrt{b}} a} - 5x^{\log_b a} + 6 = 0, \text{ або } x^{\log_b a^2} - 5x^{\log_b a} + 6 = 0.$$

Зробимо підстановку $y = x^{\log_b a}$:

$$y^2 - 5y + 6 = 0;\ y_1 = 2,\ y_2 = 3.$$

Отже, $x^{\log_b a} = 2$; $x_1 = 2^{\log_a b}$; $x^{\log_b a} = 3$; $x_2 = 3^{\log_a b}$.

90. Позначимо центри куль, що дотикаються площини трикутника в його вершинах A, B і C, відповідно через O_1, O_2, O_3, а радіуси їх через $AO_1 = x$, $BO_2 = y$, $CO_3 = z$.

Проведемо $O_1M \parallel AB$, $O_2N \parallel BC$ і $O_3L \parallel AC$. Тоді одержимо три прямокутних трикутники: O_1O_3L, O_2O_3N, O_2O_1M, в яких гіпотенузи дорівнюють:

$$O_1O_3 = x + z;\ O_2O_3 = y + z;\ O_2O_1 = x + y.$$

За теоремою Піфагора: $(z+y)^2-(z-y)^2=a^2$; $(x+z)^2-(x-z)^2=в^2$; $(x+y)^2-(x-y)^2=c^2$,

або $yz=\frac{a^2}{4}$, $xz=\frac{в^2}{4}$, $xy=\frac{c^2}{4}$. (1)

Перемноживши ці рівняння, знайдемо:

$$x^2y^2z^2=\frac{a^2b^2c^2}{2^6};\ xyz=\frac{abc}{8}.$$

Тепер легко знайти x, y та z, поділивши останнє рівняння на кожне з рівнянь (1).

В результаті одержимо:

$$x=\frac{bc}{2a};\ y=\frac{ac}{2b};\ z=\frac{ab}{2c}.$$

91. Покладаючи $y=ax$, одержуємо рівняння

$$x^{ax}=(ax)^x,\ \text{звідки}\ x=a^{\frac{1}{a-1}}\ \text{і}\ y=a^{\frac{a}{a-1}}.$$

Якщо $\frac{1}{a-1}=n$, то $x=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, $y=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$.

92. $7^{\log_{49}5-0,5}=\frac{7^{\log_{49}5}}{7^{\frac{1}{2}}}=\frac{7^{\log_7 5^{\frac{1}{2}}}}{7^{\frac{1}{2}}}=\frac{5^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{5}{7}}$

93. Нерівність правильна при $n=3$, бо $3^4>4^3$. Доведемо, що коли вона правильна для будь-якого цілого додатного n, то вона буде правильною і для числа $n+1$, тобто коли

$$n^{n+1}>(n+1)^n, \quad (1)$$

$$\text{то}\ (n+1)^{n+2}>(n+2)^{n+1} \quad (2)$$

З очевидної нерівності

$$(n+1)^2>n(n+2)$$

одержуємо $\frac{n+1}{n}>\frac{n+2}{n+1}$; $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}>\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$,

$$\text{або}\ \frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}>\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}. \quad (3)$$

Нерівності (1) і (3) однакового смислу і їх члени додатні. Отже, перемноживши їх, одержимо: $(n+1)^{n+2}>(n+2)^{n+1}$. Можна ще розв'язати цю задачу з допомогою формули бінома Ньютона.

94. Користуючись формулою $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$, послідовно дістанемо:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}},\ \cos\frac{\alpha}{2^2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2^2}},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \cos\frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{\alpha}{2^n}}.$$

Звідси $\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n} =$

$$= \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2^2}}\cdots\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{\alpha}{2^n}} =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{2\cdot 2\cdots 2\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}.$$

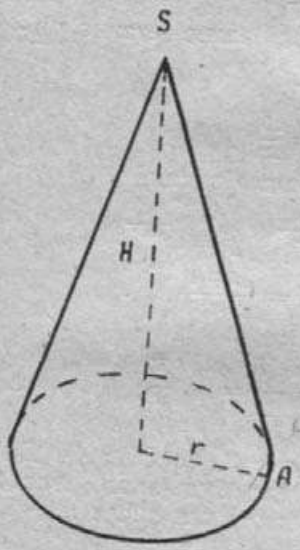

Рис. 56.

95. Відомо, що площа вписаного чотирикутника

$$s = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

де p — півпериметр. За властивістю описаного чотирикутника $a + c = в + d$, звідки $p - в = d$, $p - c = a$, $p - d = в$, отже $S = \sqrt{abcd}$.

96. Нехай $AO = r$, $\angle SAO = \alpha$. (Рис. 56) Тоді

$$SA = \frac{r}{\cos\alpha},\ S_б = \frac{\pi r^2}{\cos\alpha}, \qquad (1)$$

$H = r\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $V = \frac{1}{3}\pi r^3\,\mathrm{tg}\,\alpha$, звідки $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$.

Підставивши значення r в рівність (1), одержимо:

$$S_б = \frac{\pi}{\cos\alpha}\sqrt[3]{\frac{9V}{\pi^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{9\pi V^2}{\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha}}.$$

Знайдемо тепер, при якому значенні α бічна поверхня конічного намету має найменше значення; для цього знайдемо значення α, при яких знаменник підкореневого виразу має найбільше значення. Перетворимо вираз $\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$:

$$\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha = \sqrt{\cos^2\alpha \cdot \sin^4\alpha} = \sqrt{\cos^2\alpha\,(1-\cos^2\alpha)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{2\cos^2\alpha \cdot (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)}{2}}.$$

Вираз $\cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$ матиме найбільше значення при тому ж значенні α, що й підкореневий вираз. Тому що сума $2\cos^2\alpha + (1-\cos^2\alpha) + (1-\cos^2\alpha) = 2$ є стале число, то найбільше значення добутку одержимо при рівності співмножників, тобто якщо

$$2\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha, \text{ звідки}$$
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}, \text{ тобто } \frac{H}{r} = \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}.$$

ЗРАЗКИ ЗАДАЧ ДЛЯ ВІКТОРИН

1. Автомобіль їхав із Смоленська до Вязьми. Перша частина шляху містить стільки кілометрів, скільки хвилин автомобіль затратив на решту шляху. Решта шляху містить стільки кілометрів, скільки хвилин затратив автомобіль на першу частину шляху. Яка середня швидкість автомобіля?

2. Пляшка з корком коштує 1 крб. 10 коп. Пляшка на 1 крб. дорожче корка. Скільки коштує корок?

3. Не виконуючи ділення, скажіть, чи ділиться 2613456 на 36? А на 72?

4. Я задумав п'ятизначне число, відняв від нього одиницю і одержав чотиризначне. Яке число я задумав?

5. Чи може в пропорції кожен із середніх членів бути менше кожного із крайніх?

6. Чи може дріб, у якого чисельник менше знаменника, дорівнювати дробу, у якого чисельник більше знаменника?

7. Чому дорівнює різниця $|a| - a$? (написати без знаку $|a|$).

8. а) Чи можливий трикутник з сторонами 6, 12, 18?

б) А з сторонами 7, 8, 11?

в) Яким буде цей трикутник: гострокутним, прямокутним чи тупокутним?

9. Я живу на шостому поверсі, а мій товариш Терентій — піді мною на третьому поверсі.

Повертаючись додому, мені доводиться пройти 60 східців. Скільки східців проходить Терентій, коли він повертається додому?

Усно вирішити задачі від 10 до 15. Відповісти швидко.

10. Машина перевозить зерно з елеватора на залізничну станцію. На машину можна навантажити 5 *т*. Всього треба перевезти 22 *т* зерна. Скільки рейсів з елеватора на залізничну станцію зробить машина?

11. Із листа жерсті вирізали два круги діаметром в 2 *см* і 10 *см*. У скільки разів другий круг важче першого?

12. З берези виточені дві кулі з діаметрами в 2 *см* і 10 *см*. У скільки разів друга куля важче першої?

13. Подивіться на кришку сірникової коробки. Вона має форму прямокутного паралелепіпеда. Чи зміниться об'єм цього паралелепіпеда, якщо ми стиснемо його ось так? (Кришка сплющується трохи, так що після цього паралелепіпед уже похилий).

14. В рівнобедреному трикутнику один кут дорівнює 100°, другий 40°. Який із них лежить при основі?

15. В рівнобедреному трикутнику одна сторона дорівнює 100 *см*, друга — 40 *см*. Яка з них приймається за основу?

Задачі від 16 до 22 обчислити усно.

16. Обчислити: а) $91^2 - 81^2$; б) $100^2 - 97^2$; в) $98^2 - 96^2$; г) $25 \cdot 17$; *д*) $26^2/_3\%$ від 30.

17. Обчисліть добуток:

$$(1+\sqrt{c})(1+\sqrt[4]{c})(1+\sqrt[8]{c})(1+\sqrt[16]{c})(1-\sqrt[16]{c}) \text{ при } c=2.$$

18. Обчислити $\frac{1}{a-3}+2+\frac{1}{3-a}-\frac{2a-2}{a}$, якщо $a=0{,}01$.

19. Що більше: а) $\frac{30}{283}$ чи $\frac{12}{113}$? б) $\frac{18}{115}$ чи $\frac{90}{573}$? в) $\frac{49}{148}$ чи $\frac{121}{362}$?

20. Обчисліть: $\operatorname{ctg} 5° \cdot \operatorname{ctg} 10° \cdot \operatorname{ctg} 15° \ldots \operatorname{ctg} 80° \cdot \operatorname{ctg} 85°$.

21. Що більше: а) $\sin 20°$ чи $\cos 80°$? б) $\sin 260°$ чи $\cos 260°$? в) $\sin 40° \cdot \sin 50°$ чи 0,5? г) $\sin 40°$ чи $\sin 140°$?

22. Що більше: 25^{125} чи 125^{25}?

23. Щоденно рівно о 12 годині із Москви до Баку відправляється поїзд. В цей же час із Баку до Москви також відправляється поїзд. Кожен із них прибуває на місце призначення рівно через чотири доби. Скільки поїздів маршруту Баку — Москва зустрів пасажир, який виїхав 15 серпня з Москви до Баку?

24. Першу половину шляху мотоцикліст проїхав з швидкістю 30 *км* на годину, другу — з швидкістю 60 *км* на годину. Яка його середня швидкість?

25. Як трьома прямими поділити даний трикутник на чотири рівні трикутники? А як шістьома прямими на 9 рівних трикутників?

26. Що більше: а) число x чи його квадрат? чи його куб? б) число чи його квадратний корінь? в) a чи $2a$? Чи може виявитись, що $a < -a$?

27. При яких цілих значеннях x дріб $\frac{x+9}{x+5}$ буде цілим числом?

28. В токарному цеху виточують деталі із свинцевих заготовок: з однієї заготовки одна деталь. Стружку, що одержалася при обробці шести деталей, можна переплавити і виготовити з неї ще одну заготовку. Скільки деталей можна одержати з 36 заготовок?

29. Гусениця рухається по телеграфному стовпу висотою 12 *м*. Вдень вона піднімається на 4 *м*, а вночі опускається на 3 *м*. На який день після початку свого мандрування гусениця досягне вершини стовпа?

30. Гусак коштує 20 крб. і ще половину того, що він насправді коштує. Скільки ж він коштує?

31. Чи можуть сторони п'ятикутника бути рівними 1 *м*, 2 *м*, 4 *м*, 8 *м*, 16 *м*?

32. Качан капусти на $\frac{4}{5}$ *кг* важчий $\frac{4}{5}$ цього качана. Скільки важить качан?

33. Віддаль від м. Смоленська до міста *М* пасажирський поїзд пройшов за 3 години, а швидкий — за 2 години. За 1 годину швидкий поїзд проходить на 20 *км* більше пасажирського. Скільки кілометрів від м. Смоленська до міста *М*?

34. Через два роки хлопчик буде вдвічі старший, ніж він був два роки тому. А дівчинка через три роки буде втричі старша, ніж вона була три роки тому. Хто старший — хлопчик чи дівчинка?

35. Чи існує кут x такий, що $\sin x \cdot \cos x = \sin 40°$?

Задачі-жарти (з № 36 до № 50).

36. Дві дюжини помножити на три дюжини. Скільки буде дюжин?

37. Опівдні з Москви відправляється кур'єрський поїзд до Ленінграда з швидкістю 80 *км* на годину. В цей же час з Ленінграда до Москви відправився пасажирський поїзд з швидкістю 40 *км* на годину. Який поїзд при зустрічі знаходився на більшій віддалі від Москви?

38. 5 рибалок за 5 годин розпотрошили 5 судаків. За скільки годин 100 рибалок розпотрошать 100 судаків?

39. Що більше: сума всіх чисел 1, 2, 3, 4, ...,9,0 чи їх добуток?

40. На лісопильному заводі кожну хвилину машина відпилює від колоди частину довжиною в 1 *м*. Через скільки хвилин вона розпиляє колоду в 6 *м*?

41. Що дорожче — кілограм гривеників чи півкілограма двогривеників?

42. В кошику 3 яблука. Як їх поділити між трьома товаришами так, щоб одно яблуко залишилось в кошику?

43. — Чи знаєте ви пропорції? Звичайно, знаєте. Один стілець важить 3 *кг*, а два таких стільця? — «6 *кг*» — Вірно. Півень, стоячи на одній нозі, важить 4 *кг*. Скільки він важить, стоячи на двох ногах? (Відповісти швидко).

44. Трійка коней пробігла 30 *км*. По скільки кілометрів пробігла кожна коняка?

45. Дванадцять розділили пополам, одержалось сім. Як це могло трапитись?

46. Троє грали в шахи. Всього зіграно 3 партії. Скільки партій зіграв кожний?

47. У мене в лівій кишені стільки ж грошей, скільки в правій. З лівої кишені я тепер перекладаю в праву одну копійку. На скільки після цього буде більше грошей в правій кишені, ніж в лівій?

48. а) Який знак треба поставити між — 6 і 5, щоб одержати число, яке більше, ніж — 6, і менше, ніж 5?

б) А який знак треба поставити між 5 і 6, щоб одержати число, яке менше 6 і більше 5?

49. Справа відбувалася в їдальні. Під час обіду за одним столом 2 батьки і 2 сини з'їли 3 апельсина, а за другим столом 3 сини і 3 батьки з'їли 4 яйця. Як це могло трапитись, якщо відомо, що кожен з'їв або цілий апельсин, або ціле яйце?

50. Турист вирішив, як швидше добратися із села *А* до села *В*. Першу половину шляху він їхав на машині в 10 разів швидше, ніж ішов би пішки. Другу половину шляху він їхав на волах в два рази повільніше, ніж ішов би пішки. Скільки часу він зекономив від того, що їхав, а не йшов?

51. Назвіть видатних радянських математиків. Що ви знаєте про них?

52. Обчисліть в умі $\sqrt{68^2 + 51^2}$ і $\sqrt{36^2 + 48^2}$.

53. Що важче: пуд заліза чи пуд пуху?

54. Яка різниця між числом і цифрою?

55. Розв'язати усно рівняння:

$$\frac{x+3}{29}+\frac{15}{x+14}=\frac{x+32}{29}$$

56. Спростити $\sin 10^\circ \cdot \cos(80^\circ - x) + \cos 10^\circ \cdot \sin(80^\circ - x)$.

57. З допомогою чотирьох трійок і знаків дій можна написати 10 так: $\frac{3^3+3}{3}$; як ще можна з допомогою цих чотирьох трійок написати число 10?

58. У числі 235* 31* відновити стерті цифри, якщо відомо, що дане число кратне 45.

59. Знайти всі числа 13* 530*, кратні 15.

60. На яке число досить помножити 10104, щоб одержати число, яке ділиться на 36?

61. Знайти два числа, якщо відомо, що одне з них у 7 раз більше за друге і на 7 одиниць більше за нього.

62. $\frac{1}{4}$ одного числа на $\frac{1}{4}$ більше за $\frac{1}{4}$ другого числа; сума ж цих чисел дорівнює 1,624. Знайти усно ці числа.

63. Знайти два числа, сума яких дорівнює 96, а спільний найбільший дільник їх 12.

64. Обчислити усно:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}+5{,}25\right)\cdot\left(1\frac{3}{8}-0{,}125\right)\cdot 4}{24\frac{3}{4}:3-4\frac{1}{2}:2}$$

65. Які числа мають ту властивість, що $\frac{1}{100}$ числа більша за $\frac{1}{10}$ того самого числа?

66. Яке число дорівнює своїй половині?

67. Що більше: 1) $\sqrt[3]{5}$ чи $\sqrt{3}$? 2) $4\sqrt{3}$ чи $5\sqrt{2}$?

68. Обчислити усно:

$$\left(\sqrt{5+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\sqrt{5+\sqrt{3}}-\sqrt{5-\sqrt{3}}\right)^2.$$

69. Показати, що різниця $(3n+1)(3n+2) - n(n+1)$ є подвоєний квадрат непарного числа.

70. Довести, що сума трьох послідовних чисел завжди ділиться на 3.

71. Довести, що з трьох послідовних чисел одне, і тільки одне, ділиться на три.

72. Довести, що з чисел $a+в$, $a-в$, $aв$ принаймні одне кратне трьом.

73. Якщо число не ділиться на 5, то його квадрат, збільшений чи зменшений на одиницю, ділиться на п'ять. Довести.

74. Якщо n парне число, то вираз $n(n^2-4)$ ділиться на 48.

75. Кут у 150° поділено на 3 нерівних частини. Середня частина дорівнює 30°. Визначити кут між бісектрисами крайніх частин.

76. Через точку на стороні трикутника провести прямі, що відсікають трикутник, подібний до даного. Скільки цих прямих і як їх можна провести?

77. Знайти зменшуване і від'ємник в рівності:

$$\frac{****}{***}=1$$

78. На скільки збільшиться величина дробу, якщо до чисельника додати тисячну частину знаменника?

79. Поділити 40 на дві частини так, щоб одна частина складала 30% другої частини.

80. Довести: «Якщо сума чотирьох чисел є число непарне, то добуток їх — число парне».

81. Сума внутрішніх кутів опуклого n — кутника відноситься до суми зовнішніх кутів, як 2 : 1. Визначити n.

82. Довести:

а) «Якщо дріб $\frac{m-n}{m+n}$ нескоротна, то і дріб $\frac{m}{n}$ також нескоротна».

б) «Дріб $\frac{aв}{a+в}$ нескоротна. Чи буде дріб $\frac{a}{в}$ також нескоротна?».

83. Чи може сума трьох послідовних натуральних чисел бути простим числом?

84. В опуклому n — кутнику кожен зовнішній кут більше 90°.
Знайти n.

85. Розв'язати нерівність: $|x|>2x$.

86. Чи існують трикутники, в яких середини трьох висот лежать на одній прямій?

87. Периметри квадрата і ромба рівні між собою. Площа якої фігури більша?

88. Довести, що в будь-якій трапеції трикутники,

творені відрізками діагоналей і бічними сторонами рапеції, рівновеликі.

89. Прямокутник і паралелограм мають рівні основи рівні периметри. Площа якої фігури більша?

90. Чи можна вписати в коло два подібних трикутники?

91. Обчислити $\sec\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}$, де k — довільне ціле число.

92. Довести, що $\sin\alpha + \cos\alpha \neq 1{,}5$ при будь-яких значеннях α.

93. Що більше: 100^{20} чи 9850^{10}?

94. Чи можна побудувати шестикутну піраміду, якої всі ребра були б рівні?

95. Чому рівняння $\lg(5-x) - \lg(x-6) = 6$ не має розв'язків?

96. Якою найменшою кількістю площин можна обмежити частину простору?

97. Розв'язати рівняння:

$$|3-x| + |3-x| = x.$$

98. Чи можна в кубі провести площину перерізу так, щоб в перерізі одержався правильний п'ятикутник; рівносторонній трикутник.

99. Віддаль Сонця від Землі в 387 разів більша, ніж віддаль Місяця від Землі. У скільки разів об'єм Сонця більше об'єму Місяця?

100. З двох двійок і знаків, що вживаються в математиці, скласти числа, які були б:
більше нуля, але менші одиниці;
більше одиниці, але менші трьох;
більше трьох, але менші чотирьох;
більше чотирьох, але менші п'яти.

Примітка. Задачі для вікторин з 1 по 50 взяті з книги Б. Балка «Організація і зміст позакласних занять з математики», «Учпедгиз», 1956.

ЛІТЕРАТУРА ДЛЯ ВЧИТЕЛЯ

С. Е. Езріль — Математичні гуртки в середній школі. 1947.

Б. В. Гнеденко — Нариси з історії математики в Росії. 1946.

В. Е. Прудніков — Російські педагоги-математики XVIII—XIX вв. 1956. «Учпедгиз»

П. С. Моденов — Збірник задач з математики. 1952.

К. С. Барибін і А. К. Ісаков — Збірник з математики. 1952.

П. Ю. Германович — Питання і задачі на міркування. 1957.

А. А. Лавров — Про різні доведення теореми Безу, журнал «Математика в школі» № 3, 1956.

Д. О. Шклярський, М. М. Ченцов, І. М. Яглом — Вибрані задачі і теореми елементарної математики. 1954.

А. І. Можаєв — Позакласна робота як засіб розширення політехнічного кругозору учнів, журнал «Математика в школі» № 3. 1954.

С. С. Белов — Про математичні піонерські збори, журнал «Математика в школі» № 5, 1953.

М. А. Резніков — Математичний піонерський збір в V—VI класах, журнал «Математика в школі», № 5, 1953.

М. Г. Васильєв — Досвід роботи математичного гуртка десятих класів, журнал «Математика в школі» № 5, 1953.

С. М. Бернштейн — Про елементи політехнізму на уроках тригонометрії, журнал «Математика в школі» № 1, 1955.

М. І. Григор'єв — Нерівності в курсі алгебри 10 класу. 1956.

Е. Кольман — Великий російський мислитель М. І. Лобачевський. 1956.

М. В. Жвірблiс — Математичний гурток в X класі. 1955.

За редакцією О. М. Астряба і О. С. Дубинчук (НДІП) Методика викладання стереометрії. 1956.

Р. Ю. Новицька — Математичний гурток в V—VI класах. 1954.

А. І. Штукатурова — Математичні піонерські збори в V—VII класах. 1954.

О. В. Тулуб — Кібернетика. 1958.

П. С. Моденов — Збірник задач з математики (з аналізом помилок, допущених вступниками до вищих навчальних закладів). 1957.

П. Н. Дорф і А. О. Румер — Вимірювання на місцевості. 1957.

О. І. Кононенко — Обчислення на рахівниці. 1958.

Т. Я. Нестеренко і О. С. Дубничук — Деякі питання викладання математики в класах з виробничим навчанням. 1958.

В. У. Грібанов — Наближені обчислення в середній школі. 1958.

М. Б. Балк — Організація і зміст позакласних занять з математики. 1956.

А. А. Колосов — Книга для позакласного читання з математики для учнів VIII класу. 1958.

Я. І. Перельман — Жива математика. 1955.

Б. А. Кордемський — Математичні смикалка. 1955.

Я. І. Перельман — Цікава механіка. 1956.

І. П. Трефілов — Як зацікавити математикою учнів середньої школи. 1957.

В. Д. Чистяков — Математичні вечори в середній школі. 1956.

Я. І. Перельман — Цікава геометрія. 1957.

К. А. Малигін — Елементи історизму у викладанні математики в середній школі. 1958.

І. Депман — Розповіді про математику. Видавництво «Радянська школа», 1957.

Я. І. Перельман — Цікава алгебра. 1956.

За редакцією П. В. Стратілатова. Збірник статей «З досвіду проведення позакласної роботи з математики в середній школі». 1955.

За редакцією А. І. Фетісова, Збірник статей «Викладання математики в школі в світлі завдань політехнічного навчання» Академії педагогічних наук РСФСР. 1954.

О. В. Ланков — До історії розвитку передових ідей в російській методиці математики. 1953.

Збірник статей з питань методики викладання математики в середній школі. Алгебра. Упорядники: В. А. Зморович, М. Б. Гельфанд. 1951. Видавництво «Радянська школа».

Міщенко — З досвіду позакласної роботи з математики в VII—X класах середньої школи.

Збірник «З досвіду запровадження політехнічного навчання при викладанні математики в середній школі», Видавництво «Радянська школа». 1956

С. І. Зетель — Геометрія лінійки і геометрія циркуля. 1957.

П. А. Компаніець. Найпростіші графічні розрахунки в шкільному курсі математики. «Учпедгиз». 1957.

Збірник статей за редакцією О. М. Астряба «Викладання математики в середній школі при політехнічному навчанні», 1954. Видавництво «Радянська школа».

Л. І. Головіна і І. М. Яглом — Індукція в геометрії. 1956.

А. Т. Яглом і І. М. Яглом — Неелементарні задачі в елементарному викладі. 1954.

Е. С. Березанська і Ф. Ф. Нагібін — Збірник питань і вправ з алгебри і тригонометрії. 1955.

В. Ф. Жігадло — Геометричний конструктор і його застосування в школі. 1958.

Я. А. Шор — Про гурткову роботу з арифметики, журнал «Математика в школі» № 5, 1953 р.

Е. А. Петров — Позакласна робота з математики, журнал «Математика в школі», № 5, 1953.

В. В. Кутузов — Геометрія Лобачевського і елементи основ геометрії, «Учпедгиз», 1950.

І. С. Сомінський — Метод математичної індукції, 1958.

Ф. Ф. Нагібін — Математична шкатулка, 1956.

Е. М. Брадіс, В. Л. Мінковський, А. К. Харчева — Помилки в математичних міркуваннях, 1959.

І. Я. Депман — Історія арифметики, 1959.

І. Я. Депман — Розповіді про розв'язування задач, 1957.

Є. І. Маянський — Саморобні навчально-наочні посібники з математики, 1958.

Є. Ф. Данилов — Як допомогти учням знаходити шлях до розв'язування геометричних задач, 1958.

О. І. Смірнов — Функції в курсі математики 10 класу, 1956.

О. С. Шрамко — Практичні роботи з арифметики в V — VI класах на макеті будинку. 1958.

Ф. Л. Начапкін — Шкільний теодоліт, 1957.

О. О. Хмура — Збірник задач з математики практичного змісту для V — X класів середньої школи, 1957.

Д. О. Шклярський, М. М. Ченцов, І. М. Яглом — Вибрані задачі і теореми елементарної математики, 1954.

К. І. Швецов — Перший російський підручник з математики, 1959.

ЗМІСТ