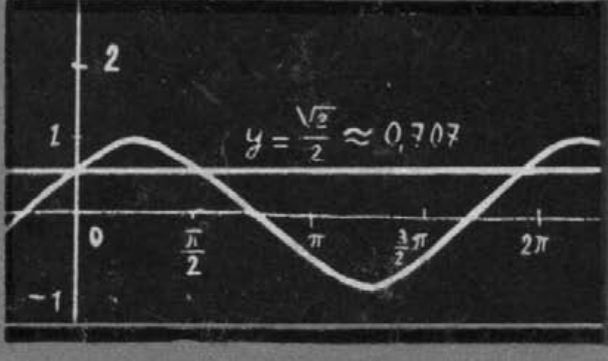
О. О. ХМУРА

УРОК З МАТЕМАТИКИ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ



О. О. ХМУРА

УРОК
З МАТЕМАТИКИ
В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

За редакцією кандидата
педагогічних наук
Т. Я. Нестеренко

ВИДАВНИЦТВО „РАДЯНСЬКА
ШКОЛА“ КИЇВ — 1965

51(07)
Х66

У книзі узагальнено досвід автора і кращих учителів м. Кіровограда та Кіровоградської області по впровадженню нових методів і форм раціональної організації викладання математики в старших класах.

Особливу увагу приділено методам активізації розумової діяльності учнів, узагальненням, установленню логічних зв'язків, систематизації, практичному застосуванню вивчуваного матеріалу.

У книзі подано багато прикладів розробок окремих уроків, класних і домашніх завдань (у трьох варіантах відповідно до оцінок «5», «4» і «3») з методичними вказівками.

Книга розрахована на вчителів математики старших класів.

§ 1. ПРОБЛЕМА РАЦІОНАЛЬНОЇ ОРГАНІЗАЦІЇ ПЕДАГОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ В СТАРШИХ КЛАСАХ І ШЛЯХИ ЇЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Перебудова народної освіти, що здійснюється за рішенням партії і уряду, передбачає не тільки зміни в змісті та формах навчання, а й зміну і вдосконалення самих методів навчання.

Починаючи з 1959 р., у багатьох школах м. Кіровограда і Кіровоградської області було проведено навчально-педагогічний експеримент. Мета його — удосконалити процес навчання з математики в старших класах і підвищити ефективність уроку як основної форми навчання. Боротьбу за повноцінний урок очолили викладачі математики, оскільки математика є основним предметом політехнічного циклу в школі, і від того, наскільки глибокі і міцні знання учнів з математики, набагато залежить підготовка їх до життя, до участі в суспільній праці, до якісного засвоєння інших предметів, таких, як фізика, хімія, астрономія і креслення.

Уже на третьому році навчального експерименту рух за перебудову навчально-виховного процесу, за перебудову уроку вийшов далеко за межі Кіровоградської області. Багато вчителів (як математики, так і інших предметів) України, Молдавії та інших республік активно включилися в перебудову викладання за прикладом кіровоградських товаришів. Одні повністю перейняли організацію навчальної роботи, запропоновану кіровоградцями, і творчо застосовують її на практиці; інші, відповідно до своїх умов, взяли тільки деякі її елементи.

Що ж примусило вчителів математики повести рішучу боротьбу за більш раціональну організацію навчання, за високопродуктивний урок?

Хоч математика належить до найважчих шкільних предметів і вимоги до математичної підготовки учнів весь час зростають, часу на її засвоєння відводиться явно недостатньо; особливо мало часу відведено на відшліфування мате-

матичних понять, на формування умінь і навичок. Внаслідок цього рівень математичної підготовки учнів середньої школи недостатньо високий. У доповіді міністра освіти РРФСР Є. І. Афанасенка вказано: «... рівень загальноосвітньої підготовки у значної частини учнів залишається невисоким. Хоча успішність з року в рік дещо підвищується, проте щороку на другий рік залишається велика кількість школярів. В оцінках успішності переважають трійки. Екзамени у вищі і середні спеціальні заклади також свідчать про серйозні прогалини в знаннях випускників восьмирічних і середніх шкіл, особливо з російської мови, математики і фізики» (Доповідь на нараді в Москві в серпні 1963 р.).

У наказі по Міністерству освіти УРСР № 153 від 22. X 1963 р. говориться: «...аналіз наслідків екзаменів з математики вступників до вузів УРСР у 1963 р. свідчить, що рівень знань значної частини випускників середніх шкіл залишається низьким і не задовольняє вимог вищої школи. Переважну частину вступників на фізико-математичні факультети складають випускники середніх шкіл, які мали хороші оцінки з математичних предметів. Проте наслідки екзаменів свідчать, що багато з них не має належної математичної підготовки для успішного навчання на цих факультетах».

За статистичними даними Міністерства освіти УРСР, у школах республіки 1962/1963 навчальний рік закінчили з посередніми знаннями 55% учнів I—IV класів, 70% — V—VIII класів і 80% — IX—XI класів. Це оцінки головним чином з математики і фізики.

Ось чому перед викладачами математики особливо гостро постала проблема максимально раціонального використання навчального часу, раціональної організації навчальної роботи учнів як у класі, так і вдома.

Для виявлення причин недосконалої організації навчання з математики у старших класах Кіровоградський обласний інститут удосконалення кваліфікації вчителів і викладачі кафедри математики Кіровоградського педінституту провели спеціальний експеримент щодо ефективного використання навчального часу і розподілу його між окремими основними етапами навчального процесу (вивченням нового матеріалу, формуванням умінь і навичок, опитуванням учнів і перевіркою домашніх завдань).

Результати перевірки показали, що вчителі математики тільки на опитування для так званого нагромадження оці-

нок витрачають до 50% навчального часу. Так, у школах № 6, 27, 31 м. Кіровограда, Завальєвській, Маловисківській, Кремгесівській № 2 та інших школах Кіровоградської області при вивченні тем «Подібність фігур», «Рівняння І-го степеня і нерівності», «Дійсні числа. Квадратні рівняння» на перевірку знань учнів було відповідно витрачено 40,6%, 44,7%, 48,6% навчального часу. Подібні результати було виявлено і в ряді шкіл Донецької, Волгоградської, Запорізької областей, Удмуртської АРСР, Білоруської РСР і багатьох інших.

Як було з'ясовано, значна кількість часу непродуктивно витрачається на розв'язування в класі невиконаних учнями вдома (найчастіше через прогалини в знаннях) вправ і задач; на повторне пояснення раніше вивченого, але погано засвоєного матеріалу; на вислуховування неповних, поверхових, а іноді й неправильних відповідей учнів (адже кожна двійка в журналі — сигнал про непродуктивно витрачений час); на формування запитань і очікування відповіді при поясненні нового матеріалу методом бесіди, який поки що є домінуючим на уроках у IX—XI класах; на повільне розв'язування (знову-таки через прогалини в знаннях) прикладів і задач, що вимагають застосування вивченого матеріалу.

Це призводить до того, що у викладача залишається мало часу, щоб довести до учнів певну суму знань і навчити їх застосовувати ці знання на практиці.

Через невисокий рівень математичних знань значної кількості учнів учителі нераціонально використовують навчальний час при поясненні і закріпленні нового матеріалу. Спиняючись на питаннях, тісно пов'язаних з вивченням нового матеріалу, але погано засвоєних на попередніх уроках, учитель цим самим відволікає увагу учнів від вивчення нового матеріалу. Іноді доводиться по кілька разів повертатися до доведення теореми або виведення формули з тим, щоб пов'язати попереднє з наступним, що також порушує цілісність і послідовність викладу. При цьому увага старшокласників розсіюється, не концентрується на головному. Відволікаючись на пояснення раніше вивченого, вчитель змушений скорочувати час, відведений на вивчення і закріплення нового матеріалу.

Дослідження, проведене в експериментальних класах, показало, що через прогалини в знаннях учнів на непередбачене повторення витрачається в середньому від 24 до 52% часу, відведеного на вивчення і закріплення нового

матеріалу. Таким чином, незалежно від учителя на уроках відбувається перерозподіл навчального часу за етапами уроку, тому що вчитель далеко не завжди може передбачити, скільки часу він затратить на той чи інший вид роботи на уроці, хоч при плануванні на кожний етап уроку відводиться певна кількість часу, зумовлена характером уроку.

Структура досліджених уроків з математики в старших класах виявилася однаковою; за дуже рідкими винятками (контрольні письмові роботи) уроки складалися з п'ятьох обов'язкових етапів. Це так званий комбінований урок, що практикується в молодших класах, тоді як вікові особливості старшокласників, їх інтереси, загальний і математичний розвиток вимагають застосування нових організаційних форм і методів навчання.

Розумова діяльність юнаків порівняно з підлітками проходить більш організовано і послідовно, що виявляється в здатності встановлювати логічні зв'язки, приводити в певну систему набуті знання, правильно класифікувати поняття, засвоювати в одиницю часу більше навчального матеріалу, причому більш грунтовно. Саме в такому віці інтенсивно формуються переконання, розвивається потреба в точній аргументації своїх суджень, висновків, а мислення стає критичнішим.

Проте в багатьох школах методи навчання в старших класах нічим не відрізняються від методів навчання у восьмирічній школі. До навчання старшокласників учителі часто підходять так само, як і при навчанні у початковій і восьмирічній школах. У деяких школах на старшокласників усе ще дивляться як на нетям, тоді як юнаки і дівчата 15—18років відзначаються великою допитливістю, вони шукають відповіді на різноманітні, часто складні питання, але не завжди дістають їх від учителя.

У вересні 1963 р. на черговому засіданні дискусійного клубу «Комсомольской правды», присвяченому темі «Знати, шукати, боротися», крім учених (професор А. А. Ляпунов, академіки П. Я. Кочина і С. Л. Соболєв, доктор технічних наук Г. С. Мишренко та ін.) , були присутні також школярі. Виступаючи на цьому засіданні, учениця Наташа Т. сказала: «Вчусь я в школі одинадцять років. І протягом цих років навчання в нашій школі — просто підготовка до екзаменів. Взагалі мало нас у школі вчать думати. На уроках ми тренуємо пам'ять, а не думку, нас запитують, що думають інші, а що ми думаємо самі — ні. Аби ми знали матеріал за

програмою. І ось що цікаво. Розмова про перебудову методів викладання йде давно. Скільки я чула подібних суперечок, скільки читала про них! Але не знаю, як у інших школах, а ось у нашій все залишається, як було...»

Вивчення методів навчально-виховної роботи в багатьох школах Кіровоградської області показало, що колективні форми роботи на уроках переважають над індивідуальними. Тільки 7—15% навчального часу відводиться на самостійну роботу учнів, причому нерідко самостійна робота має контролюючий, а не навчальний характер. Учні не привчаються застосовувати свої знання в самостійній роботі, недостатньо тренуються у розв'язанні задач і прикладів. Самостійна робота починається часто не в класі, а вдома, тоді як домашня самостійна робота повинна бути продовженням класної самостійної роботи, до деякої міри її завершенням і підготовкою до засвоєння нових знань на наступному уроці.

Досвід показав, що без організації на кожному уроці самостійної навчальної роботи не можна досягти підвищення успішності з математики, якісного виконання домашніх завдань, розвантажити учнів від надмірних, іноді непосильних домашніх завдань, підвищити ефективність навчання на самому уроці.

На уроках математики в IX—XI класах ми систематично спостерігаємо порушення однієї з неодмінних умов навчального процесу в радянській школі — гармонійного поєднання в навчанні колективізму з урахуванням індивідуальних особливостей кожного учня, його нахилів, його інтелектуальних і фізичних можливостей.

Багато вчителів орієнтується головним чином на «середнього учня», а тому часто втрачається справді творча атмосфера в класі, сильні учні перетворюються в пасивну групу, стають спостерігачами, верхоглядами. Не слабкі підносяться до рівня сильних, а сильні опускаються до середнього рівня.

Методика викладання, що склалася в старших класах, не усуває труднощів, які виникають в учнів у процесі навчання, і мало враховує здібності і можливості кожного учня. Наприклад, під час розв'язування задач на застосування теорії всі старшокласники незалежно від підготовки часто виконували завдання однакової складності. Зрівнялівка в класних і домашніх завданнях призводить до гальмування розвитку учнів з різною математичною підготовкою, сковує їх ініціативу і творчість.

Процес пізнання у старшокласника часто не виходить за межі засвоєння ним уже сформульованих вчителем і викладених у підручнику істин, хоч знання, які в готовому вигляді засвоюють учні, по суті, не розвивають їх творчого мислення і здібностей. Учитель при наявних формах організації навчальної роботи на уроці неспроможний своєчасно встановити, до чого учень виявляє найбільший інтерес, щоб створити сприятливі умови для розвитку цих інтересів. Відомо, що здібності не існують самі по собі, вони розвиваються в процесі діяльності, яка вимагає застосування цих здібностей.

Мало хто з учителів заперечуватиме, що при існуючій організації навчання відмінники в класі часто залишені самі на себе. Їх залучають до роботи вчителі тільки в окремих випадках, коли, наприклад, треба розв'язати задачу або приклад, яких не розв'язала більшість учнів вдома, виконати вправу під час закріплення нового матеріалу. Особливої уваги відмінники заслуговують тоді, коли в класі присутні перевіряючі — директор, завуч, інспектор та ін. Залучаючи цю категорію учнів, учитель демонструє присутнім «активну» роботу всього класу, хороші знання, вміння і навички учнів. В усіх інших випадках відмінники залишені самі на себе.

Внаслідок такого формального ставлення до знань цієї категорії старшокласників трапляються випадки лібералізму в оцінці їх знань, а звідси і провал таких «відмінників» на екзаменах у вузи.

Статистичні дані показують, що найбільше відмінників у початковій школі, менше у V—VIII класах і найменше у IX—XI класах. Наведемо ці дані за 1961/1962 навчальний рік по школах Кіровоградської області.

З 87 120 учнів I—IV класів встигали на «5» 10 840, тобто близько 12,4%; з 84 681 учня V—VIII класів встигали на «5» 2 584, тобто близько 3%; з 13 004 старшокласників встигали на «5» 369, що становить приблизно 2,8%.

Багато учнів, які в початковій школі вчилися на відмінно, у восьмирічній і середній школах знижують рівень знань. Часто причиною цього є те, що ускладнена навчальна робота в старших класах потребує вміння прикласти більше зусиль, чого, по суті, не було прищеплено учням раніше.

Найбільш здібні і свідомі учні продовжували вчитися на «5», деякі на «4», а частина переходила в «середняки». Залишені без уваги, вони не завжди сумлінно ставилися до

навчання. Тому в їх знаннях з'явилися прогалини, кількість яких з кожним наступним роком зростала, що не могло не позначитися на навчанні в старших класах.

Значного удосконалення потребує також існуюча система обліку і оцінювання знань, умінь і навичок старшокласників. Під час перевірки домашніх завдань і опитування учнів доводиться вислуховувати відповіді як кращих учнів, так і учнів із слабкими і посередніми знаннями. У цих умовах опитування на шкоду навчанню перетворюється в простий контроль і втрачає своє педагогічне значення, оскільки відповіді учнів із слабкими і посередніми знаннями ніколи не є навчальними. Через слабку підготовку учнів процес опитування незалежно від учителя часто триває 20 і більше хвилин, а протягом решти часу уроку навіть досвідчений учитель неспроможний ефективно побудувати вивчення нового матеріалу, закріпити його, а також організувати самостійну роботу.

На першому етапі комбінованого уроку, як показали дослідження, часто перевіряють тільки знання теорії і мало уваги приділяють перевірці, як засвоєні математичні уміння і навички учні уміють застосувати на практиці, тобто при розв'язуванні задач і прикладів. А це також не сприяє поглибленню і зміцненню знань, умінь і навичок з математики.

Практика показує, що саме недосконалість форм перевірки знань, які практикуються в школі, призвела до того, що багато учнів перестало систематично виконувати домашні завдання, сумлінно ставитися до навчання. Знаючи наперед, коли його запитають, учень майже безпомилково визначає дні, коли треба готуватися до уроку. При цьому учень орієнтується не на шкільний розклад, а на свій власний, за яким протягом чверті у нього виявляються вільними від математики всі дні, крім 3—4, адже більше 2—3 раз на чверть його не запитають.

При такій перевірці знань не можна вважати об'єктивною і оцінку за чверть, виставлену учневі на підставі двох оцінок за усні відповіді і двох — за контрольні роботи, оскільки оцінки за усні відповіді охоплюють досить обмежене коло знань з матеріалу 2—3 уроків, а контрольні роботи, запропоновані в одному або кількох рівноцінних варіантах, часто непосильні для багатьох середніх і слабких учнів, а тому не завжди вони виконують їх самостійно.

Можна навести немало прикладів, коли учень, який

одержав незадовільну оцінку, наприклад з теми «Границі», опитується повторно тільки через 2—3 тижні і одержує оцінку «3» або «4» вже з іншої теми, наприклад «Прогресії». У таких випадках вважають, що учень виправив двійку. Дуже рідко буває, щоб через 2—3 тижні учня опитали саме з того матеріалу, з якого він одержав незадовільну оцінку. Практично виходить, що той матеріал, якого у свій час учень не знав, так і залишається незасвоєним. Через це прогалини у знаннях учнів нагромаджуються, а разом з цим з'являються значні труднощі в засвоєнні нових знань, розв'язуванні задач і прикладів, з'являється потяг до зубрячки. В результаті втрачається інтерес до вивчення предмета (багато старшокласників вчиться не заради справжнього набуття знань, а заради оцінки, екзамену і свідоцтва про закінчення школи).

Недосконалість організаційних форм і методів навчання, нераціональне використання навчального часу не сприяли підвищенню якості математичної підготовки випускників середньої школи. Тому досвідчені вчителі немало доклали зусиль для удосконалення як окремих етапів навчального процесу, так і уроку в цілому.

Радянська дидактика збагатилася липецьким, ростовським і кіровоградським досвідом організації навчального процесу.

Навчальним експериментом, який проводився в школах Кіровограда і Кіровоградської області, ставилось за мету знайти такі форми організації навчання в старших класах, які сприяли б:

а) прищепленню учням інтересу і творчого підходу до вивчення математики;

б) всебічному розвитку самостійності і активності старшокласників;

в) розвиткові логічного мислення;

г) формуванню умінь застосовувати математичні знання на практиці;

д) вихованню в учнів умінь і навичок, необхідних для самостійного вивчення математики.

Експеримент передбачав також добір оптимальних форм навчання учнів старших класів:

а) раціонального розподілу і використання навчального часу;

б) забезпечення наступності між восьмирічною, середньою і вищою школами;

в) забезпечення міжпредметних зв'язків і зв'язку викладання математики з виробничим навчанням;

г) створення оптимальних умов для самостійної роботи учнів у процесі навчання;

д) знаходження раціональних шляхів виявлення і розвитку здібностей, самостійності, ініціативи і творчості учнів у процесі вивчення математики;

е) подолання труднощів у процесі навчання через диференційований підхід до учнів;

є) експериментальної перевірки ефективності нової організації навчання;

ж) визначення ролі і місця програмованого навчання при вивченні математики в старших класах.

У процесі дослідження значну увагу було приділено індивідуальному та колективному спостереженню і аналізу уроків, оцінці ефективності застосовуваних форм навчання з урахуванням рівня знань учнів у контрольних і експериментальних класах.

Педагогічний експеримент було організовано в Кіровоградських школах № 6 (учителі А. В. Зеленецька, З. П. Сєдова, О. О. Хмура), № 27 (учитель М. С. Пахманов), № 31 (учитель О. С. Стрижевський) і в Завальєвській школі Гайворонського району (учитель І. С. Хазін). Організований дослід було проведено в сорока школах Кіровоградської області.

Внаслідок тривалого педагогічного експерименту, спостережень і аналізу уроків, проведених протягом 1956—1959 рр. у Кіровоградській школі № 6, а потім з 1959 до 1963 р. у згаданих вище чотирьох школах, а також за статистичними даними досліджень у більш ніж сорока школах області було розроблено і практично перевірено нову форму організації навчального процесу при вивченні математики в старших класах середньої школи *.

Суть нової організації навчального процесу з математики в старших класах полягає в тому, що окремі ланки навчального процесу (повторення, формування умінь і навичок, засвоєння нових знань, виявлення знань і т. д.) було виділено в самостійні уроки.

Нова форма організації навчання в старших класах розрахована на тематичне планування програмного матеріалу на чверть, півріччя і передбачає такі типи уроків:

---

* У педагогічній літературі ця нова форма організації навчального процесу відома як лекційно-практична форма навчання.

а) підготовчі;
б) засвоєння нових знань;
в) тренувальних вправ або практичних занять;
г) семінарських занять;
д) контрольно-залікові.

У наступних параграфах буде дано характеристику кожного типу уроків і наведено приклади конкретних уроків.

Практика показала, що в навчальному процесі при вивченні тієї чи іншої теми не завжди бувають всі вказані типи уроків, але послідовність їх обов'язкова. Не завжди, наприклад, проводять заліки, оскільки практичні заняття, самостійна робота учнів, семінарські заняття, письмові контрольні роботи часто дають можливість повністю перевірити знання учнів.

Результати роботи експериментальних шкіл Кіровоградської області, багатьох шкіл УРСР, РРФСР, Білоруської РСР, Удмуртської АРСР, Молдавської РСР, Литовської РСР та інших, які перейшли на нову організацію навчання з математики в старших класах, цілком виправдали себе, що наочно підтверджується даними таблиць 1—5 (див. додатки).

§ 2. ПІДГОТОВЧІ УРОКИ

Підготовчими ми називаємо такі уроки, які проводять перед вивченням нової теми для відтворення в пам'яті учнів основних питань, що лежать в основі вивчення нового матеріалу. По суті це уроки цілеспрямованого повторення з метою підготовки учнів до більш активного і свідомого засвоєння нового матеріалу. На цих уроках сильніші учні повторюють раніше вивчене, середні відтворюють у пам'яті напівзабуте, а слабкі заново засвоюють те, чого не засвоїли раніше.

На уроках цього типу до деякої міри вирівнюють знання учнів і тим самим створюють сприятливі умови для успішного засвоєння нового.

Як виникла сама проблема підготовчого уроку?

Наші досліди по виявленню причин низького рівня математичної підготовки учнів, про які йшлося в попередньому параграфі, показали, що під час вивчення нового матеріалу вчитель витрачає багато часу на пояснення забутого або раніше не засвоєного учнями. Такі відхилення призводять до того, що під час пояснення нового матеріалу порушується цілісність і стрункість у викладі матеріалу вчителем, роз-

сіюється увага учнів, що негативно позначається на сприйманні вивчуваного.

Виникає запитання: Яких заходів треба вжити, щоб усі учні класу могли успішно засвоювати новий матеріал?

Щоб з'ясувати це, було проведено такий експеримент. У двох десятих класах учитель Г. Т. Савченко (Помошнянська школа № 2 Кіровоградської області) під час вивчення теми «Властивості паралельних перерізів у піраміді» порізному організував роботу.

На уроці в Х-Б кл. (контрольний) перед поясненням нового матеріалу вчитель протягом 5 *хв* провів фронтальне повторення матеріалу, який використовується при доведенні теорем нової теми. Крім того, у процесі пояснення і закріплення нового матеріалу вчитель також спинився на повторенні відповідних питань. Протягом уроку вчитель перевірив домашнє завдання, опитавши при цьому трьох учнів (16 *хв*), протягом 19 *хв* пояснив одну теорему (А. П. Кисельов, Геометрія, ч. II, § 74), а колективне розв'язання задачі № 13, § 9 (Н. Рибкін, Збірник задач з геометрії, ч. II) до кінця не було доведено. Домашнє завдання вчитель дав після дзвоника (А. П. Кисельов, ч. II, § 74; Н. Рибкін, ч. II, § 10, № 14).

У Х-А класі (експериментальний) урок розпочався з підготовчої роботи, в процесі якої було доведено такі теореми:

1. Сторони кута, що перетинаються рядом паралельних прямих, поділяються ними на пропорціональні частини.
2. Ознаки подібності трикутників.
3. Подібні многокутники (означення, приклади).
4. Площі подібних трикутників або многокутників відносяться, як квадрати схожих сторін.
5. Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то лінії перетину паралельні.

Під час доведення теорем було використано рисунки до них, які демонструвалися через епідіаскоп. На практичне застосування доведених теорем учні усно розв'язали задачі № 6 (1) з § 8; 9 і 55 з § 9; 126 з § 13 (Н. Рибкін, ч. I). Підготовчий етап тривав на цьому уроці 16 *хв*.

Потім було організовано самостійну роботу над підручником на доведення теореми і наслідків, що випливають з неї (15 *хв*).

Протягом решти часу методом коментування усно було розв'язано задачу № 13 і самостійно учнями — задачу № 14.

Додому було задано § 74—77 (А. П. Кисельов, ч. II); задачі № 15, 16 і задачу 17 (як не обов'язкове завдання (Н. Рибкін, ч. II, § 9).

Наступний урок в обох класах спеціально було відведено на перевірку знань, умінь і навичок учнів за матеріалом теми, яку було вивчено на попередньому уроці. Десятикласникам запропонували одну й ту саму роботу: у письмовій формі на окремих аркушах виконати домашнє завдання.

Ось результати самостійної письмової роботи учнів.

У контрольному Х-Б класі за виконану роботу учні мали такі оцінки: «5» — 2 учні, «4» — 4, «3» — 10 і «2» — 8 учнів.

На виконання роботи затрачено 45 *хв*.

А в експериментальному Х-А класі за виконану роботу учні дістали такі оцінки: «5» — 12 учнів, «4» — 8, «3» — 5, «2» — 1 учень.

При цьому з самостійною письмовою роботою учні Х-А класу справилися за 30 *хв*, а 19 з них виконали роботу за 20—25 *хв*.

Протягом решти 15 *хв* уроку вчитель у фронтальній бесіді також перевірив знання учнів і відповіді декого з них оцінив відповідними балами («5» — 2, «4» — 3).

Результати самостійних письмових робіт учнів Х-А класу, а також проведена на уроці бесіда показали, що завдяки вміло організованому повторенню учнів було повністю підготовлено до самостійного засвоєння нових знань. Вони свідомо і глибоко засвоїли новий матеріал за підручником і вміють розв'язувати задачі із застосуванням цього матеріалу.

Учні ж Х-Б класу не були підготовлені до засвоєння нового матеріалу, і тому частина з них поверхово і формально оволоділа новим матеріалом, а решта й зовсім не засвоїла. У зв'язку з цим на наступному уроці вчитель змушений був проводити в цьому класі підготовче повторення і повторне пояснення теми «Властивості паралельних перерізів у піраміді».

Аналогічні досліди над невеликими темами було проведено в експериментальних і контрольних класах окремих шкіл: № 6 і № 27 м. Кіровограда, Завальєвській, Олександрівській № 1, Калниболотській і Кремгесівській № 2.

На значно більшій кількості матеріалу було проведено експеримент у школі № 6 м. Кіровограда (учитель О. О. Хмура).

В одному з двох паралельних дев'ятих класів, однако-

вих за рівнем знань (вірніше, за підсумковими оцінками на кінець VIII класу), було проведено всебічну, глибоку перевірку знань, умінь і навичок дев'ятикласників за всі попередні роки навчання.

На кожного учня було заведено спеціальну картку, в якій відмічалися всі прогалини, виявлені в його знаннях з математики в обсязі програми восьмирічної школи.

Виявлені прогалини в знаннях старшокласників були істотними, а їх кількість — неоднаковою. Особливо багато їх було у тих, хто вчився посередньо. Характер виявлених прогалин у знаннях багатьох учнів показав, що дальше успішне вивчення математики всіма учнями класу неможливе без ліквідації виявлених прогалин. Було вирішено в IX-А класі не приступати до вивчення нового матеріалу доти, поки не буде усунуто прогалин у знаннях. Про це було попереджено всіх учнів цього класу. У другому паралельному класі (IX-Б) вивчення нового матеріалу продовжувалося в повній відповідності з календарним планом.

Для IX-А кл. було складено спеціальний календарний план (див. Додатки) з двох математичних предметів (алгебри і геометрії), розрахований на 36 навчальних годин, розроблено індивідуальні завдання (класні і домашні) з урахуванням прогалин у знаннях кожного учня. Календарним планом було охоплено всі ті теоретичні питання з курсу математики восьмирічної школи, які в свій час були погано засвоєні учнями, а тепер і зовсім забуті. Крім того, до них було підібрано систему відповідних практичних вправ для закріплення теоретичного матеріалу в класі і вдома.

На кожному уроці учні експериментального класу були відвертими з учителем, вони не приховували своїх прогалин у знаннях, при потребі зверталися до вчителя або до своїх товаришів за допомогою.

Раніше на уроках не було такої масової, справді творчої активності, як тепер. Ніхто не почував себе скованим, обмеженим особливими умовами контролю, кожний працював сумлінно, на повну силу, намагаючись використати кожну хвилину, щоб поповнити і зміцнити свої знання з математики.

Оцінок у класний журнал не виставляли. Виконання домашніх завдань також не оцінювали. Проте точно враховувався в індивідуальних карточках стан знань учнів, їх успіхи і недоліки в роботі по заповненню тих чи інших прогалин у знаннях.

На уроках переважала індивідуальна навчальна робота хоч одночасно з нею практикувалася також групова і колективна робота.

Домашні завдання диференціювалися відповідно до підготовки учнів і мали як індивідуальний, так і груповий характер.

Якщо прогалини в знаннях були однаковими для певної групи учнів, то домашнє завдання, як правило було груповим. В інших випадках воно було індивідуальним.

До кожного уроку вчитель готував індивідуальні і групові завдання відповідно до характеру і кількості прогалин у знаннях учнів. У ці завдання входили як теоретичні питання, так і відповідні практичні вправи.

Урок починався з індивідуальної перевірки домашнього завдання. При цьому вчитель, працюючи з одним або з групою учнів, подавав їм практичну допомогу і разом з тим пропонував відповідне завдання для самостійної роботи на весь урок. У процесі самостійної роботи учням дозволялося звертатись за допомогою не тільки до вчителя, а й до товаришів, а також використовувати підручник або довідники.

Отже, самостійній роботі по усуненню прогалин у знаннях учнів відводиться повністю весь урок.

У процесі такої роботи вчитель має можливість всебічно вивчити не тільки справжній рівень знань кожного учня, його сильні і слабкі сторони, а й індивідуальні якості характеру та його здібності до математики.

На цих уроках вчитель продовжує виявляти прогалини в знаннях учнів, заносити їх в індивідуальні картки і вживати відповідні заходи щодо їх усунення.

Після тридцятишестигодинної навчальної роботи по усуненню прогалин у знаннях учнів експериментального класу треба було також ліквідувати відставання у виконанні програми.

Щоб подолати відставання у виконанні прогалин, до календарного плану було внесено відповідні зміни. Наприклад, ряд програмних питань, які раніше планувалися на два уроки, тепер передбачалося вивчати за один урок. Досвід показав, що збільшення на одному уроці програмних питань, логічно зв'язаних між собою, особливих труднощів і перевантажень у старшокласників не викликає.

Календарний план
з алгебри для експериментального IX-А класу

№ п. п	Зміст програмного матеріалу	Кількість годин	Дата виконання
1	Змінна величина. Обмежена і необмежена змінна величина. Нескінченно мала і нескінченно велика величини. Границя змінної величини. Існування границі обмеженої змінної величини (без доведення)	1	3/XI
2	Теорема про границю суми, добутку і частки змінних величин, які мають границі (без доведення)	1	3/XI
3	Вправи	2	10/XI
	Прогресії		
1	Арифметична прогресія. Формула загального члена арифметичної прогресії. Властивість суми двох членів прогресії, рівновіддалених від крайніх членів. Формула суми членів арифметичної прогресії	1	17/XI
2	Розв'язування задач і вправ	2	17/XI, 24/XI
3	Геометрична прогресія. Формула загального члена геометричної прогресії. Властивість добутку двох членів прогресії, рівновіддалених від крайніх членів. Формула суми членів геометричної прогресії	1	24/XI
4	Розв'язування задач і прикладів	2	24/XI, 1/XII
5	Границя суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії	1	1/XII
6	Перетворення періодичних дробів у звичайні	1	8/XII
7	Розв'язування комбінованих задач на прогресії	3	8/XII, 15/XII
8	Контрольна робота	1	22/XII
	Показникова і логарифмічна функції		
1	Узагальнення поняття про показник степеня: степені з нульовим, від'ємним і дробовим показниками і дії над ними	1	22/XII
2	Розв'язування задач	2	29/XII
3	Поняття про степінь з ірраціональним показником	1	14/I
4	Показникова функція, її властивості і графік	2	14/I, 21/I
5	Означення логарифма. Логарифмічна функція, її властивості і графік	2	21/I, 28/I
6	Логарифм добутку, частки, степеня і кореня	2	28/I, 4/II
7	Логарифмування і потенціювання виразів	2	4/II, 11/II
8	Десяткові логарифми і їх властивості	2	11/II, 18/II
9	Характеристика і мантиса. Логарифмічні таблиці, їх будова і використання	1	18/II
10	Дії над логарифмами з від'ємними характеристиками	2	25/II

№ п. п.	Зміст програмного матеріалу	Кількість годин	Дата виконання
11	Обчислення за допомогою логарифмічних таблиць	2	25/II, 1/III
12	Контрольна робота	1	1/III

Календарний план з геометрії для експериментального 9-А класу

	Правильні многокутники		
1	Означення. Побудова правильних вписаних і описаних многокутників. Теорема про побудову кола, описаного навколо будь-якого правильного многокутника і вписаного в правильний многокутник	2	5/XI
2	Знаходження центрального, внутрішнього і зовнішнього кутів правильного многокутника. Відношення периметрів правильних однойменних многокутників	1	12/XI
3	Формули для обчислення сторін вписаних фігур: квадрата, правильного шестикутника і трикутника	1	12/XI
4	Розв'язування задач	2	19/XI
	Довжина кола і площа круга		
1	Лема про опуклу ламану лінію і про периметр опуклого многокутника	1	26/XI
2	Означення довжини кола. Відношення довжини кола до діаметра. Обчислення довжини дуги, яка має n°	1	26/XI
3	Розв'язування задач	2	3/XII
4	Площа круга. Відношення площі двох кругів. Площа сектора. Площа сегмента.	1	10/XII
5	Розв'язування задач	2	10, 17/XII
6	Контрольна робота	1	17/XII
	Огляд курсу планіметрії		
1	Основні теореми з розділів: подібність трикутників і многокутників, перпендикулярність і паралельність прямих; метричні співвідношення в трикутнику і крузі	3	24/XII, 31/XII
	Стереометрія		
	Прямі і площини		
1	Основні властивості площин. Взаємне розміщення двох прямих у просторі: прямі, що перетинаються; паралельні і мимобіжні прямі	1	31/XII
2	Розв'язання задач	2	16/I
3	Перпендикуляр і похилі до площини. Визначення перпендикулярності прямої до площини. Теорема про два перпендикуляри	1	23/I
4	Теореми про перпендикуляр і про похилі до площини, проведені з однієї точки, взятої поза площиною. Обернені теореми	1	23/I

№ п. п.	Зміст програмного матеріалу	Кількість годин	Дата виконання
5	Теорема про три перпендикуляри, обернена теорема. Кут прямої з площиною	1	30/I
6	Розв'язування задач	2	3/II, 6/II
7	Пряма і площина, паралельні між собою. Означення. Ознака паралельності прямої і площини. Теорема про лінію перетину двох площин, з яких одна проходить через пряму, паралельну другій площині. Наслідки	1	6/II
8	Розв'язування задач	1	13/II
9	Паралельні площини. Означення. Ознака паралельності площин. Теореми: а) про перетин двох паралельних площин третьою; б) про відрізки паралельних прямих, які лежать між паралельними площинами; в) про кути з відповідно паралельними сторонами	1	13/II
10	Розв'язування задач	2	20/II
11	Кут між двома мимобіжними прямими	1	27/II
12	Теореми: а) про площину, перпендикулярну до однієї з паралельних площин; обернена теорема; б) про пряму, перпендикулярну до однієї з паралельних площин; обернена теорема	1	27/II
13	Розв'язування задач	1	5/III
14	Контрольна робота	1	5/III

На кінець III чверті, коли в експериментальному класі було ліквідовано відставання з програми, в обох дев'ятих класах було перевірено знання, уміння і навички учнів з вивченого матеріалу. Для цього було виділено по два уроки в кожному класі для усної перевірки знань і по два уроки для контрольної роботи з алгебри і геометрії.

Текст контрольної роботи з алгебри

П. О. Ларічев. Збірник задач з алгебри, ч. II.

Варіант I	*Варіант II*
№ 939, № 1085 (3), № 1094 (2), № 1118 (3)	№ 940, № 1085 (4), № 1094 (3), №1118 (4)

Текст контрольної роботи з геометрії

Н. Рибкін, Збірник задач з геометрії, ч. II.

Варіант I	*Варіант II*
§ 1, № 20	§ 1, № 21
§ 3, № 60 (18)	§ 3, № 61 (19)

Таблиця

Результати контрольних робіт в експериментальному і контрольному класах

№ п.п	Класи	Кількість учнів	Предмет	Оцінка				Успішність у %		
				5	4	3	2	5 і 4	3	2
1	IX-А (експериментальний)	28	Алгебра	12	11	5	—	82	18	—
2	Той самий клас	28	Геометрія	8	12	7	1	71	25	4
3	IX-Б (контрольний)	26	Алгебра	6	7	11	2	50	42	8
4	Той самий клас	26	Геометрія	5	8	10	3	50	40	10

Учні, які не мають прогалин у знаннях, спроможні засвоювати матеріал з більшим успіхом і навіть у значно більшому обсязі порівняно з програмою, ніж учні, які мають неповноцінні знання з раніше вивченого матеріалу. Тому учні експериментального класу, ліквідувавши недоліки в знаннях, успішніше справлялися також з виконанням практичних задач і вправ на застосування нових знань, умінь і навичок, розв'язували їх значно більше і швидше, ніж учні контрольного класу.

У процесі експерименту ми не раз упевнювалися в тому, що на всіх етапах навчання проблема готовності учнів до навчання є, мабуть, найважливішою. Саме непідготовленість учнів до вивчення нової теми, що зумовлена наявністю певних прогалин у їх базисних знаннях *, уміннях і навичках, спричинює нерозуміння нового матеріалу, формальне і по-

---

* *Базисні знання учнів* — це такі знання, які безпосередньо пов'язані з осмисленим засвоєнням і практичним застосуванням матеріалу, що вивчається на даному уроці

верхове його засвоєння, нагромадження прогалин узнаннях, непосильні труднощі в навчанні, викликає сумнів у своїх силах і здібностях.

Результати експериментальних досліджень впевнили нас у необхідності введення підготовчих уроків. Підготовчі уроки стали передбачатися і календарними планами. Вчителі приступили до розробки питань і методики проведення уроків цього типу.

Кількість підготовчих уроків, що їх планує вчитель, залежить від обсягу і характеру питань, передбачених для повторення, а також від підготовки учнів. Залежно від знань учнів учитель може зменшити або збільшити їх кількість.

До таких уроків учитель повинен готуватися особливо старанно: спочатку ознайомитися з матеріалом наступної теми за підручником, виділити в ній усі питання, які вивчаються на основі попереднього матеріалу.

За чітко розробленим планом учитель заздалегідь веде старанну перевірку знань, умінь і навичок учнів за цими питаннями.

Яким способом можна виявити сильні і слабкі сторони в знаннях учнів з матеріалу, пов'язаного з вивченням нового?

Наводимо деякі з цих способів:

1. П'яти-, десятихвилинні самостійні класні роботи, які містять як теоретичні, так і практичні питання з раніш вивченого.

2. Добір невеликих домашніх завдань, які учні виконують паралельно з основним завданням.

3. Дво-, трихвилинна фронтальна перевірка знань учнів у класі за запланованими запитаннями з теорії і практики.

4. Індивідуальна бесіда на уроках тренувальних вправ.

5. Перевірка домашніх завдань і опитування учнів.

6. Під час вивчення нового матеріалу і його закріплення, якщо в цьому є конкретний, а не штучний зв'язок.

7. Відповіді учнів на семінарах і контрольно-залікових уроках.

8. Спеціальні уроки запитань і відповідей, які практикують з цією метою 2—3 рази на рік.

9. Аналіз відповідей і контрольних робіт на екзаменах.

10. Перевірка учнівських зошитів і контрольних робіт.

Виявлені прогалини в знаннях учнів учитель вносить у свій план для розгляду на підготовчому уроці. Одночасно

вчитель разом з учнями виготовляє потрібні наочні посібники: моделі, рисунки, графіки, плакати та ін.

Практикується і написання учнями рефератів, математичних творів з найважливіших питань, які виносять на підготовчі уроки.

Щоб підготовчі уроки досягали мети, перед вивченням певної теми або розділу треба завчасно спланувати всі теоретичні питання для повторення на цьому уроці, підібрати відповідні задачі і вправи. План проведення підготовчого уроку з переліком запитань і вправ учні переписують у свої зошити в позаурочний час.

Учитель попереджає учнів, що під час підготовки до уроку робота над пройденим матеріалом не повинна бути простим повторенням (повторювати не значить повторюватися). Кожний учень, відповідаючи на те чи інше запитання, не просто відновлює раніше вивчене, а за допомогою міркувань, зіставлень, використання всієї суми набутих знань домагається доведення теореми, оригінального виведення формули, виявляючи при цьому свою індивідуальність і здібності з математики.

Вчителеві, який працює з класом перший рік, важко чітко спланувати всі теоретичні питання і відповідну систему практичних вправ для проведення уроків. Тому на ці уроки слід планувати вузлові і найбільш важливі з точки зору зв'язку раніше пройденого матеріалу з новим питання і відповідні практичні вправи. Але надалі, коли в процесі роботи з учнями буде вивчено всі сильні і слабкі сторони в їхніх знаннях, учитель докладно планує всі підготовчі уроки на чверть або півріччя.

Учителі, які працюють з класом не перший рік, вносять підготовчі уроки в тематичний план на чверть або півріччя. Може бути, що деякі питання, заплановані на той або інший підготовчий урок, буде повторено з учнями до моменту вивчення певної теми. У таких випадках ці питання знімають з плану підготовчого уроку, а час, що вивільниться, використовують на глибше повторення інших питань або відводять на вивчення нового матеріалу.

Кількість підготовчих уроків, їх конкретний зміст і місце у загальному процесі навчання з математики визначає кожний учитель, виходячи з конкретних умов своєї школи.

Де взяти час для підготовчих уроків?

Старанний аналіз продуктивності використання на-

вчального часу показує, що через наявність прогалин у знаннях учнів багато часу нераціонально витрачається на виконання в класі невиконаних вдома завдань, на опитування учнів, на повторне пояснення матеріалу, який учні погано зрозуміли на попередньому уроці, на тривале пояснення нового матеріалу, якщо виникає потреба повторити забуте, на виправлення і доповнення відповідей слабких учнів, на вимушені повторні (непланові) контрольні роботи, які практикують у випадку, коли з першою контрольною роботою учні не справилися, і т. д.

Багато часу витрачається також непродуктивно через погану організацію самого уроку (непідготовленість учнів до уроку, відсутність таблиць з готовими рисунками, неправильний добір вправ та ін.). Тому при ретельній підготовці до уроку і належній його організації вчитель завжди знайде час на підготовчі уроки, тим більше, що сама наявність цих уроків сприяє раціональній організації навчального процесу.

Залежно від умов роботи в тому чи іншому класі учитель може вносити в календарний і тематичний плани необхідні зміни. Наприклад, він може змінити заплановану кількість підготовчих уроків, внести зміни в зміст цих уроків. Підготовчий урок не слід перевантажувати фактичним матеріалом.

Як правило, на підготовчі уроки виносять такі питання, які лежать в основі вивчення нової теми або які недостатньо засвоєні учнями.

Наводимо приклади змісту підготовчих уроків.

1. Плануючи, наприклад, тему «Площі многокутників», учитель П. Д. Штефан з Калниболотської школи Новоархангельського району перед вивченням формули Герона передбачив підготовчий урок за такими питаннями:

1. Властивість сторони трикутника, яка лежить проти гострого кута.
2. Теорема Піфагора.
3. Формули скороченого множення.
4. Периметр многокутника.
5. Поняття про складання плану земельних ділянок.

Залежно від рівня підготовки учнів до плану підготовчого уроку вносять ті питання, які, на думку вчителя, дадуть можливість так повторити матеріал, щоб у процесі вивчення нового в учнів не виникало питань, на яких треба було б спеціально спинятися в процесі пояснення.

Наприклад, питання про складання плану земельних ділянок винесено на урок тому, що далі проводитиметься практична робота на складання плану ділянки, а цей матеріал вивчався в попередні роки.

2. Перед вивченням теми «Степені і корені» проводять підготовчий урок на тему «Квадратні і кубічні корені», на якому докладно розглядають теоретичні і практичні питання, які стосуються піднесення до квадрата і куба чисел, добування квадратного і кубічного коренів.

3. Перед вивченням теми «Показникова і логарифмічна функції» проводять підготовчий урок, на якому розглядають такі питання: дії над степенями з цілими показниками, поняття про ірраціональне число, робота з математичними таблицями (піднесення до степеня і добування кореня).

4. Перед вивченням теми «Системи рівнянь другого степеня» проводять підготовчий урок, на якому розглядають такі питання: рівняння, властивості рівняння, графік лінійної функції, система двох лінійних рівнянь, алгебраїчний і графічний способи розв'язування системи рівнянь. На цьому уроці паралельно з вивченням теорії розв'язують практичні вправи на її застосування.

5. Перед вивченням теми «Правильні многокутники» проводять підготовчий урок з теми «Залежність між дугами, хордами і відстанями їх від центра. Сума внутрішніх кутів многокутника».

6. Перед вивченням теми «Двогранні кути» на підготовчу роботу відводять не 45, а 10—15 *хв*. За цей час з теми «Плоскі кути» повторюють усі необхідні означення, кути суміжні, вертикальні, із взаємно паралельними і перпендикулярними сторонами, розв'язують практичні вправи.

Методика проведення підготовчих уроків залежить від характеру повторюваного матеріалу, відповідної системи практичних вправ і рівня знань учнів. Як і всі інші типи уроків, підготовчий урок не повинен будуватися за шаблоном і трафаретом.

На підготовчих уроках мають місце пояснення вчителя, відповіді учнів на запитання, колективна і самостійна робота, індивідуально-групова робота з учнями, робота над підручником і багато інших видів навчальної роботи.

Найбільшого навчального ефекту вчитель досягає тоді, коли на таких уроках переважає індивідуальна і індивідуально-групова робота з класом, хоч, як правило, часто має місце і пояснення вчителя, і евристична бесіда, і колек-

тивна робота. Щоб підкреслити особливе значення повторюваних питань для успішного засвоєння нового матеріалу, нерідко підготовчий урок розпочинають з бесіди про нову тему, її місце і значення в курсі математики і на практиці. Після короткої бесіди вчитель переходить до повторення і закріплення запланованих на цей урок питань, перелік яких завчасно було доведено до відома учнів.

Повторення можна розпочати з колективного доведення теорем або виведення формул на дошці і аналізу всіх незрозумілих при цьому питань; із самостійної роботи над доведенням теорем або виведенням формул; з колективної, індивідуальної та індивідуально-групової роботи з питань теорії; з роботи над підручником; з фронтального повторення; з доведення теорем за моделями і рисунками та інших видів роботи. Під час колективної роботи в доведенні теорем або виведенні формул активну участь бере весь клас. Учні виправляють, доповнюють відповіді товаришів біля дошки, вносять свої пропозиції.

Так можна організувати першу частину уроку, на якій колективно розбирають теоретичний матеріал. Другу частину уроку присвячують розв'язанню задач і прикладів на застосування теорем. Повторення теоретичних питань можна організувати паралельно з їх практичним закріпленням. У цьому випадку після кожної доведеної теореми розв'язують задачу на її застосування.

При індивідуальній і груповій формах організації повторення матеріалу вчитель готує до уроку картки з індивідуальними і груповими завданнями, які містять у собі теоретичні питання і відповідні вправи. Картки складають з урахуванням прогалин у знаннях одного чи групи учнів. На початку уроку їх роздають учням для самостійної роботи. При цьому роль учителя стає особливо відповідальною. Протягом уроку вчитель не один раз мусить побувати біля учнів, що мають індивідуальні і групові завдання. Учні, які мають однакове завдання, утворюють окремі групи і відповідно займають місця в класі. У процесі самостійної роботи дозволяється користуватися стабільними підручниками, таблицями, довідниками, збірниками задач та іншою літературою; допускають і навіть заохочують справжню взаємодопомогу між учнями. Не виключається й колективний розгляд найважливіших питань теорії, колективне розв'язування задач, а також аналіз тих питань і задач, які становлять найбільшу складність для багатьох учнів.

Під час повторення теоретичного матеріалу і розв'язування задач користуються наочними посібниками, виготовленими до цього уроку, а також тими, що є у шкільному математичному кабінеті.

Підготовчий урок можна побудувати на розв'язуванні однієї або кількох задач. При цьому задачі слід підбирати такі, щоб, розв'язуючи їх, можна було повторити всі питання, потрібні для вивчення нового матеріалу. При недостатній математичній підготовці учнів інколи доводити теореми або виводити формули, а також ілюструвати застосування їх при розв'язуванні задач і прикладів доводиться самому вчителеві. Щоб закріпити матеріал і впевнитися в повноцінності знань учнів, після такого повторення учням пропонують самостійну роботу.

Наприкінці кожного підготовчого уроку підводять підсумки роботи. Учитель вказує, що добре засвоїли учні, а на що і кому конкретно слід ще звернути увагу, оцінює знання учнів, окремим учням пропонує індивідуальні домашні завдання.

Методика проведення підготовчих уроків і їх організація можуть бути найрізноманітнішими.

Підготовчі уроки проводять не перед кожною новою темою, а тільки перед тими, вивчення яких базується на раніше вивченому і частково забутому матеріалі.

Крім того, не обов'язково, щоб підготовча навчальна робота тривала 45 *хв*. Залежно від обсягу, змісту повторюваного матеріалу і рівня знань учнів така робота може тривати від 15 до 45 *хв*. У таких випадках після підготовчого етапу вчитель приступає до вивчення нового матеріалу.

Приклади підготовчих уроків

Приклад 1. (Помошнянська школа № 2, вчитель Г. Й. Пашковський).

Вивчення теми «Многогранники» вчитель розпочав з підготовчого уроку, на якому було поставлено такі запитання:

1. Формули для обчислення площ трикутників.
2. Зміст деяких теорем із стереометрії;
   а) про три перпендикуляри;
   б) про лінії перетину двох паралельних площин третьою;
   в) про ознаки перпендикулярності прямої і площини, двох площин;

г) про перпендикуляр, який проведено до однієї з двох взаємно перпендикулярних площин, що має спільну точку з другою площиною.

Повторення цих питань сприяло свідомому засвоєнню нового матеріалу, дало можливість швидко розв'язати задачі.

Підготовчий урок проходив так. Учням було запропоновано згадати всі відомі їм формули для обчислення площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2} a h_a; \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C; \quad S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A};$$

$$S = pr; \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$S = \frac{abc}{4R}; \quad S = \frac{1}{2} ab; \quad S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Згадуючи і записуючи формули, учні вказували, в якому випадку доцільно застосовувати кожну з них. Учні самостійно обчислили площу трикутника за сторонами $a = 13$ *см*; $b = 14$ *см*; $c = 15$ *см*. При цьому вчитель нагадав, що перемножувати співмножники під знаком радикала нераціонально, а слід використати правило добування кореня з добутку, відповідно згрупувавши співмножники.

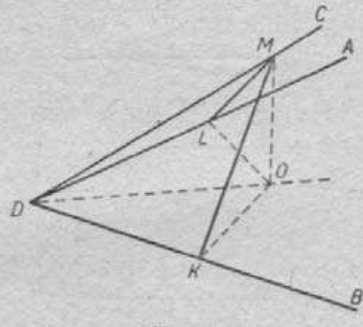


Рис. 1.

Далі вчитель запропонував повторити за підручником (А. П. Кисельов, ч. II, § 28—29) пряму і обернену теореми про три перпендикуляри. Для цього було вивішено план роботи над підручником. Для самостійного розв'язування було запропоновано задачу на доведення за готовим рисунком: «Промені CD, AD і BD не лежать в одній площині, $\angle CDA = \angle CDB$. З точки M, взятої на промені CD, опущено перпендикуляр на площину ADB. Довести, що CD перетне бісектрису кута ADB (рис. 1). У процесі самостійної роботи учням було запропоновано три способи розв'язання задачі.

I спосіб

Проведемо $OL \perp AD$ і $OK \perp BD$, тоді $ML \perp AD$ і $MK \perp BD$ за теоремою про три перпендикуляри.

$\triangle MLD = \triangle MKD$ як прямокутні, які мають спільну гіпотенузу і рівні гострі кути, отже $ML = MK$. Звідси $OL = OK$ як проекції рівних похилих. Таким чином, точка O рівновіддалена від сторін кута AD і BD.

II спосіб

Проведемо $ML \perp AD$ і $MK \perp BD$, тоді $\triangle MLD = \triangle MDK$ і, отже, $ML = MK$.

$LO = OK$ як проекції похилих ML і MK. Але $LO \perp AD$ і $KO \perp BD$, звідси точка O належить бісектрисі кута ADB.

III спосіб

Побудуємо $ML \perp AD$ і $MK \perp BD$, $\triangle MDL = \triangle MDK$, звідси $LD = KD$.

$LO = KO$ як проекції похилих LM і MK. $\triangle DOL = \triangle DOK$ за трьома сторонами. Звідси $\angle LDO = \angle KDO$. Отже, OD — бісектриса $\angle ADB$.

Вибір саме цієї задачі зумовлений потребою підготувати учнів до розв'язання типових задач на обчислення об'єму похилого паралелепіпеда (див. Н. Рибкін, ч. II, § 16, № 45, 46, 47, 48).

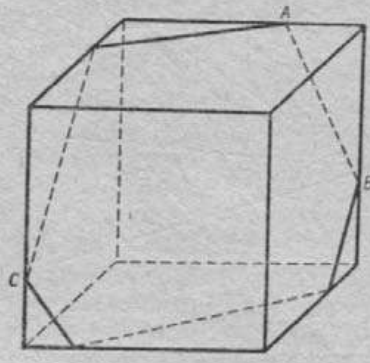


Рис. 2.

Теорему про лінію перетину двох площин було повторено за рисунком і закріплено розв'язанням задачі: «Побудувати переріз куба площиною, яка проходить через точки A, B, C на його ребрах (див. рис. 2).

Решту теорем було повторено фронтально за раніше виконаними на дошці рисунками.

Приклад 2. (Богданівська школа Знам'янського району, вчитель І. Г. Ткаченко).

Вивчення теми «Перпендикуляр і похилі до площини» вчитель розпочав з підготовчого уроку.

Ознайомивши учнів з основними питаннями нової теми,

учитель підкреслив, що для успішного засвоєння нового матеріалу слід повторити ряд питань.

1. Перпендикуляр і похилі, які проведено з однієї точки, взятої поза прямою, до цієї прямої на площині; основа перпендикуляра, основа похилої, проекція похилої на пряму.

2. Ознаки рівності трикутників.

3. Суміжні кути і їх властивості; прямі суміжні кути.

4. Основні лінії трикутника: бісектриса, медіана, висота; властивості рівнобедреного трикутника.

5. Залежність між сторонами і кутами двох трикутників, які мають по дві рівні сторони.

Матеріал повторюють у формі бесіди, самостійної роботи учнів над підручником та в формі розв'язання задач за готовими рисунками.

У заключній частині уроку можна розглянути модель, яка ілюструє теорему про два перпендикуляри та її складові частини: площини у формі круга, квадрата, ромба, паралелограма, прямокутника; дерев'яний стержень завдовжки 20—30 *см*, набір кольорових ниток і булавок для кріплення на площині. До наступного уроку учням дають завдання: виготовити всі складові частини цієї моделі (площини роблять з картону, дерева або жерсті).

Приклад 3. (Кіровоградська школа № 6, учитель О. О. Хмура).

Підготовчий урок було проведено перед вивченням теми «Правильні многокутники».

Ось перелік питань:

1. Теорема. Якщо дві дуги дорівнюють одна одній, то стягуючі їх хорди дорівнюють одна одній і однаково віддалені від центра.

2. Теорема. Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

Наслідки з цієї теореми:

а) всі вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, дорівнюють один одному;

б) будь-який вписаний кут, який спирається на діаметр, є прямим.

3. Теорема. Кут, утворений дотичною і хордою, вимірюється половиною дуги, вміщеної всередині його.

4. Теорема. Діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду і обидві стягувані нею дуги пополам.

5. Т е о р е м а. Через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести коло і притому тільки одне.

6. Геометричне місце точок.

7. Симетрія геометричних фігур.

8. Т е о р е м а. Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $2d(n - 2)$.

9. Подібність трикутників і многокутників.

10. Т е о р е м а. Периметри подібних многокутників відносяться, як відповідні сторони.

Працюючи самостійно вдома, учні повинні подумати, як довести ту або іншу теорему не тільки таким способом, як у підручнику, а й іншим.

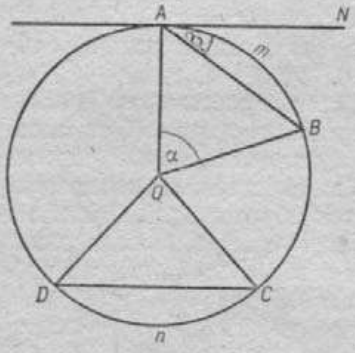


Рис. 3.

Ось приклади оригінального доведення теорем, наведених учнями на одному уроці.

Т е о р е м а 1. Якщо дуги між собою рівні, то рівні і стягуючі їх хорди.

У підручнику ця залежність доводиться способом накладання рівних між собою дуг AB і CD (рис. 3).

Для доведення теореми учні розглядали трикутники ABO і CDO. $AO = BO = OC = OD = R$.

$\angle AOB = \angle COD$ (як центральні кути, які вимірюються рівними дугами AmB і CnD).

Отже, трикутники ABO і CDO рівні між собою. З рівності цих трикутників випливає, що $AB = CD$, що й треба було довести.

О б е р н е н а т е о р е м а. Якщо хорди рівні, то рівні й стягувані ними дуги (рис. 3).

Д о в е д е н н я. З рівності трикутників AOB і COD ($AO = OB = OC = OD = R$ і $AB = CD$ за умовою) випливає, що $\angle AOB = \angle COD$, а отже, дуги AB і CD рівні, що й треба було довести.

Т е о р е м а 2. Кут, утворений дотичною і хордою, вимірюється половиною дуги, вміщеної між ними.

У підручнику ця теорема доводиться на підставі теореми про вписані кути. Учні доводили її так.

З'єднавши точки A і B з центром кола O (рис. 3), матимемо рівнобедрений трикутник AOB ($AO = OB = R$), в

якому $\angle OAB = \angle OBA$. Крім того, $AO \perp AN$, тобто $\angle OAN = 90°$.

Позначивши $BAN = \beta$, матимемо: $\angle OAB = \angle OBA = 90° - \beta$. З того, що сума кутів у трикутнику дорівнює 180°, випливає: $90° - \beta + 90° - \beta + \angle AOB = 180°$, звідки $\angle AOB = \alpha = 2\beta$, або $\beta = \frac{\alpha}{2}$ (1).

Оскільки центральний кут α вимірюється дугою AB, то з рівності (1) випливає, що кут β вимірюється половиною дуги AB.

Теорема 3. Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

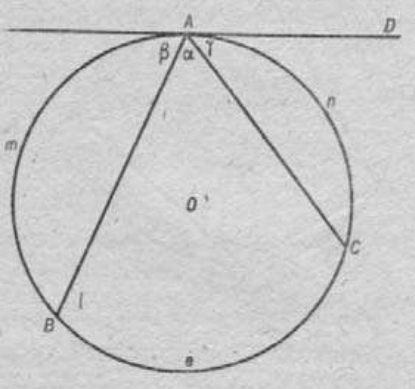


Рис. 4.

Доведення учнів мало такий вигляд: $\angle BAC = 180° - (\angle BAK + \angle CAD)$ (рис. 4). Позначивши $\angle BAC = \alpha$, $\angle BAK = \beta$ і $\angle CAD = \gamma$, матимемо: $\beta + \alpha + \gamma = 180°$, але кут β вимірюється половиною дуги AmB (або $\frac{1}{2}\breve{m}$), кут γ — половиною дуги AnC ($\frac{\breve{n}}{2}$) і α — різницею між дугою в 180° і півсумою дуг AmB і AnC [$\alpha = 180° - \frac{1}{2}(\breve{m} + \breve{n})$, але $\breve{m} + \breve{n} + \breve{e} = 360°$ і $\breve{m} + \breve{n} = 360° - \breve{e}$, тоді $\alpha = 180° - \frac{1}{2}(360° - \breve{e}) = \frac{\breve{e}}{2}$].

Інших теорем не доводили, а повторювали формулювання за готовими рисунками.

Крім повторення теорем, усно і напівписьмово розв'язували на уроці такі задачі:

1. Скільки є вписаних у дане коло кутів, рівних даному вписаному куту?

2. Показати вписані в дане коло кути, вимірювані дугами $\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2^2}, \frac{\alpha}{2^3}, \frac{\alpha}{2^4}, \ldots, \frac{\alpha}{2^n}$, де α — довільна дуга в $k°$ ($k° < 180°$), а $n = 1, 2, 3, \ldots$

3. Чи зміниться величина вписаного кута, якщо його вершину переміщати по колу?

4. Сума яких двох вписаних у коло кутів дорівнює 180°? Скільки є таких пар вписаних кутів?

5. Відомо, що вписаний кут α, який спирається на діаметр, дорівнює 90°. Чому дорівнює вписаний кут β, який спирається на хорду, яка дорівнює радіусу кола (рис. 5)?

6. Встановити співвідношення між центральним кутом, який спирається на дану дугу, і кутом, утвореним дотичною до кола на кінці дуги і хордою, що стягує цю саму дугу, та ін.

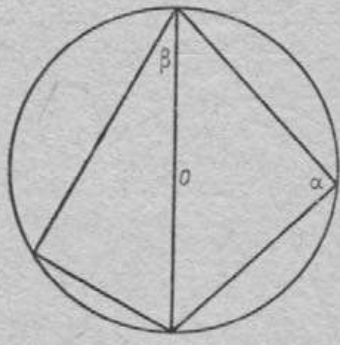


Рис. 5.

Наприкінці уроку вчитель підвів підсумки, виставив оцінки за кращі відповіді учнів, указав, на що треба звернути увагу для кращого засвоєння наступної теми, і запропонував самостійно вивчити вдома за підручником А. П. Кисельова, ч. I, § 212, 213 з нової теми «Правильні многокутники».

Приклад 4. Підготовчий урок до теми «Рівняння вищих степенів» (СШ № 31 м. Кіровограда, вчитель О. С. Стрижевський).

До початку уроку на класній дошці вчитель записав назву теми, а на переносній дошці — ряд прикладів:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
3) $x^3 - 1 = 0$, або $(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) = 0$;
4) $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$;
5) $5x^5 + 2x^4 + 2x^3 - x + 1 = 0$.

Методом евристичної бесіди було з'ясовано, що:

а) рівняння 2 — біквадратне і легко зводиться до квадратного підстановкою замість x^2 другого невідомого в першому степені. Учні самостійно знайшли корені біквадратного рівняння і за пропозицією вчителя з'ясували, що добуток коренів його дорівнює вільному члену;

б) рівняння 3 і 4 є кубічними. Формули для розв'язання кубічного рівняння ми не знаємо, але деякі з них, наприклад 3 і 4, розв'язати можемо, попередньо розклавши ліву частину рівняння на множники. Знайшовши корені цих рівнянь, учні переконалися, що й тут добуток коренів дорівнює вільному члену.

Розв'язати рівняння 5 ми поки що не вміємо, але на наступних уроках навчимося.

Учитель пояснює, що рівняння 2, 3, 4, 5 і їм подібні називаються рівняннями вищих степенів; потім записує загальний вигляд рівнянь, зауваживши при цьому, що деякі коефіцієнти в них, крім першого, можуть дорівнювати нулю, як це має місце в рівняннях 2, 3 і 5. Потім учитель звертає увагу учнів на те, що для рівняння вищого степеня з цілими раціональними коефіцієнтами велике значення має розкладання на множники лівої частини рівняння, що приводить до зниження степеня рівняння. Тому треба повторити питання, зв'язані з розкладанням на множники.

Учням пропонують такі вправи для розв'язання з коментуванням.

1. Розкласти на множники (усно і напівписьмово):

а) $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$;
б) $x^2 - 4x + 3$;
в) $8x^3 + 27$;
г) $a^2 + 4$;
д) $m^2 - 3$;
е) $3 + a$.

Після розв'язування вправ учнями вчитель пояснює на дошці ділення многочлена на двочлен. Учні записують у зошити $(15 - a + 15a^2 - 3a^3) : (5 - 3a)$.

З коментуванням виконують ділення $(3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 2) : (x - 1)$ (цей приклад учні розв'язують самостійно).

Під час перевірки завдання вчитель ставить такі запитання: 1) Назвіть ділене. 2) Що є дільником? 3) Чому дорівнює частка, остача? 4) Як виразити ділене за допомогою дільника, частки й остачі?

Завдання додому: розв'язати вправи із збірника задач П. О. Ларічева, ч. I, № 1497 (2,3), 1338 (3,6) і 1658 (2).

Приклад 5. Підготовчий урок до теми «Дослідження квадратного тричлена» (Богданівська школа Знам'янського району, заслужений учитель школи І. Г. Ткаченко).

Хід уроку

1. За таблицею учні повторюють основні види квадратних рівнянь і формули для їх розв'язання (таблиця висить на дошці).

Потім було розв'язано такі приклади біля дошки:

а) $x^2 + 6x - 7 = 0$;
б) $3x^2 - 32x + 20 = 0$;
в) $2x^2 - 7x - 15 = 0$.

3. Повторення властивостей коренів зведеного квадратного рівняння (теорема Вієта) за таблицею.

Таблиця

Рівняння	Його корені	Залежність між коренями і коефіцієнтами рівняння
а) $x^2 + px + q = 0$	x_1 і x_2	$x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$
б) $ax^2 + bx + c = 0$	x_1 і x_2	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
в) $x^2 - 5x + 6 = 0$	$x_1 = 3$, $x_2 = 2$	$x_1 + x_2 = 5$; $x_1 \cdot x_2 = 6$
г) $x^2 + 6x - 7 = 0$	$x_1 = 1$, $x_2 = -7$	$x_1 + x_2 = -6$; $x_1 \cdot x_2 = -7$
д) $3x^2 - 32x + 20 = 0$	$x_1 = \frac{2}{3}$; $x_2 = 10$	$x_1 + x_2 = \frac{32}{3}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{20}{3}$
е) $2x^2 - 7x - 15 = 0$	$x_1 = 5$; $x_2 = -\frac{3}{2}$	$x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$; $x_1 \cdot x_2 = -\frac{15}{2}$

(Для рівнянь г), д) і е) корені рівнянь брали з таблиці у готовому вигляді).

4. Знаки коренів квадратного рівняння визначали за знаками його коефіцієнтів у таблиці.

Таблиця

Рівняння	Залежність знаків коренів рівняння від знаків його коефіцієнтів	
$x^2 + px + q = 0$	$q > 0$ корені однакових знаків	$p > 0$ $x_1 < 0$; $x_2 < 0$
$x^2 + px + q = 0$	$q > 0$ » » »	$p < 0$ $x_1 > 0$; $x_2 > 0$
$ax^2 + bx + c = 0$	$\frac{c}{a} > 0$ » » »	$\frac{b}{a} > 0$ $x_1 < 0$; $x_2 < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$	$\frac{c}{a} > 0$ » » »	$\frac{b}{a} < 0$ $x_1 > 0$; $x_2 > 0$
$x^2 + px + q = 0$	$q < 0$ корені різних знаків	$x_1 > x_2$ $p > 0$ $x_1 < 0$; $x_2 > 0$
	$q < 0$ » » »	$x_1 > x_2$ $p < 0$ $x_1 > 0$, $x_2 < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$	$\frac{c}{a} < 0$ корені різних знаків	$x_1 > x_2$ $\frac{b}{a} > 0$ $x_1 < 0$; $x_2 > 0$
	$\frac{c}{a} < 0$ » » »	$x_1 > x_2$ $\frac{b}{a} < 0$ $x_1 > 0$; $x_2 < 0$

Таблиця

Види квадратних рівнянь і формули для їх розв'язання

(Таблиця висить на дошці)

№ п. п.	Вид квадратного рівняння	Загальний вид	Формула для знаходження коренів квадратного рівняння	Приклад на розв'язок квадратного рівняння за його формулою
1	Повне квадратне рівняння	$ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$)	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$3x^2 - 5x - 2 = 0$ $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$ $x_1 = 2;\quad x_2 = -\frac{1}{3}$
2	Повне квадратне рівняння, коли другий коефіцієнт є число парне	$ax^2 + 2kx + c = 0$	$x_{1,2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2-ac}}{a}$	$5x^2 - 8x + 3 = 0$ $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-15}}{5} = \frac{4 \pm 1}{5}$ $x_1 = 1;\quad x_2 = \frac{3}{5}$
3	Зведене квадратне рівняння	$x^2 + px + q = 0$	$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	$x^2 - 11x + 30 = 0$ а) $x_{1,2} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 30}$; $x_1 = 6;\quad x_2 = 5$ б) $x_{1,2} = 5{,}5 \pm \sqrt{30{,}25-30} = 5{,}5 \pm 0{,}5$; $x_1 = 6;\quad x_2 = 5$
4	Неповні квадратні рівняння	а) $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0$; $a \neq 0$; $b \neq 0$)	$x_1 = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$	а) $x^2 - 7x = 0$ $x_1 = 0;\ x_2 = 7$
		б) $ax^2 + c = 0$ ($b = 0$; $a \neq 0$; $c \neq 0$)	$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	б) $5x^2 - 45 = 0$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{45}{5}} = \pm 3$ $x_1 = 3,\ x_2 = -3$ $3x^2 + 48 = 0$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{48}{3}} = \pm\sqrt{-16}$ не існує
		в) $ax^2 = 0$ ($b = c = 0$; $a \neq 0$)	$x_1 = x_2 = 0$	в) $3x^2 = 0;\ x_1 = x_2 = 0$

Після розгляду таблиці вчитель сформулював висновки для випадку, коли вільний член рівняння додатний.

Для випадку, коли вільний член рівняння від'ємний, висновки формулювали учні («Якщо в рівнянні вільний член від'ємний, то корені рівняння мають різні знаки; менший за абсолютною величиною корінь має знак середнього коефіцієнта»).

5. Повторені правила закріплювали на таких прикладах, записаних на дошці:

а) $x^2 - 8x + 15 = 0$ г) $x^2 + 7x + 12 = 0$
б) $x^2 - 4x - 21 = 0$ д) $x^2 - 3x - 10 = 0$
в) $x^2 + 5x - 24 = 0$ е) $x^2 + 4x - 12 = 0$

Приклади розв'язували так: учитель, вказуючи на рівняння, наприклад а) називає прізвище учня. Учень відповідає: «Корені рівняння однакових додатних знаків $x_1 = 3$; $x_2 = 5$». Або для рівняння д) «Корені мають різні знаки, менший за абсолютною величиною корінь від'ємний $x_1 = -2$; $x_2 = 5$».

6. Характер коренів рівняння за його дискримінантом визначали за таблицею:

Таблиця

Рівняння	Дискримінант	Характер коренів
$ax^2 + bx + c = 0$	$b^2 - 4ac > 0$	Корені дійсні і різні за величиною
$ax^2 + bx + c = 0$	$b^2 - 4ac = 0$	Корені дійсні і рівні за величиною
$ax^2 + bx + c = 0$	$b^2 - 4ac < 0$	Корені комплексні

Правило закріплювали в процесі розв'язання таких прикладів:

а) $4x^2 + x - 3 = 0$ б) $x^2 + 8x + 20 = 0$
в) $2x^2 - 7x + 6 = 0$ г) $x^2 + 6x + 9 = 0$
д) $3x^2 + 11x + 6 = 0$ е) $x^2 - 8x - 20 = 0$

Перші два приклади розв'язували з коментуванням, решту — самостійно. Хто не встиг у класі, закінчував дома.

Приклад коментованого виконання вправи а).

Учень: «Дискримінант рівняння $4x^2 + x - 3 = 0$ дорівнює 49, тобто додатний, отже, корені рівняння дійсні і різні за величиною. Пишу: $4x^2 + x - 3 = 0$; $b^2 - 4ac = 49$».

Другий учень продовжує: «Корені рівняння мають різні знаки, корінь з меншою абсолютною величиною додатний.

Сума коренів дорівнює $-\frac{1}{4}$, а їх добуток $-\frac{3}{4}$. Знаходимо корені. Пишу: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{8} = \frac{-1 \pm 7}{8}$; $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{3}{4}$».

§ 3. УРОКИ ПОЯСНЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Уроками пояснення нового матеріалу ми називаємо такі, на яких учні ознайомлюються з новим питанням програми. Уроки цього типу мають дуже велику питому вагу не стільки за кількістю, скільки за значенням їх у загальній системі уроків.

У чистому вигляді уроки пояснення нового матеріалу в школі бувають дуже рідко. Як правило, новий матеріал вивчається і закріплюється на тому самому уроці; під час вивчення нового матеріалу частково повторюють і раніше вивчений, здійснюють контроль.

Проте домінуючу роль на уроках такого типу відіграє засвоєння нових знань, тому весь хід уроку (його організація, методи, добір завдань) підпорядковано саме цій меті.

На ці уроки вчитель не планує ні опитування учнів, ні якихось інших видів контролю, ні докладної перевірки домашньої роботи.

Готуючись до таких уроків, учитель головну увагу зосереджує на тому, щоб якнайдоступніше організувати вивчення нового матеріалу і його закріплення, щоб якнайраціональніше розподілити час між цими двома етапами роботи, згідно з характером виучуваного матеріалу і рівнем знань учнів, щоб підібрати найбільш вдалу систему вправ для закріплення.

Чим старші учні, тим частіше виникає можливість весь урок присвячувати тільки вивченню нового матеріалу.

Виділяючи уроки цього типу, ми виходили як з вікових особливостей учнів, так і з характеру самого предмета. Вік учнів і їх загальний математичний розвиток дають їм змогу засвоювати новий матеріал у значно більшому обсязі, ніж це було в середніх класах.

Для кращого розуміння питання, збереження логічних зв'язків і можливості узагальнень математичних понять доцільно вивчати питання теорії на одному уроці, а не розподіляти одне питання на кілька уроків.

Наприклад, вивчаючи теорему косинусів, найдоцільніше на одному уроці розібрати усі випадки справедливості цієї теореми для гострокутного, тупокутного і прямокутного трикутників, а також наслідки, що випливають з теореми (означення виду трикутника відносно кутів за його сторонами). Наступні за ним уроки треба спеціально присвятити практичному застосуванню цієї теореми, виробленню умінь і навичок.

За структурою, яка склалася протягом тривалого часу, на кожному уроці, крім вивчення нового матеріалу, обов'язковими видами навчальної роботи були також опитування, закріплення, повторення та ін.

Як правило, на уроці, побудованому за такою структурою, зменшувалася роль найголовнішої його частини — засвоєння нового матеріалу. Часто з незалежних від учителя причин на опитування і перевірку домашніх завдань витрачалося дуже багато часу, а тому новий матеріал вчитель пояснював наспіх, розриваючи єдине ціле на частини. Наспіх проводилося також закріплення, а то й зовсім не проводилося. Тому учні відчували великі труднощі як у процесі засвоєння теоретичних положень, так і під час розв'язання задач.

І це цілком закономірно. Адже, згідно з вченням І. П. Павлова, в основі засвоєння матеріалу лежать тимчасові зв'язки. Знання набуваються за асоціацією і утримуються в пам'яті тільки певний період. Для зміцнення і систематизації знань, для засвоєння їх на триваліший час дуже важливо з фізіологічної точки зору попередити згасання цих знань, збагатити і зміцнити попередні зв'язки. Тимчасові зв'язки в корі головного мозку кожного учня виникають і згасають згідно з законами, які регулюють процеси збудження і гальмування. У різних учнів це відбувається порізному і залежить від запасу попередніх знань, а також активної самостійної розумової діяльності учнів на уроці. Якщо засвоєні на уроці знання учень самостійно не закріпить певною кількістю вправ, то здобуті нові знання і створені на їх основі тимчасові зв'язки через деякий час зникають.

Щоб запобігти цьому, а також зміцнити ці зв'язки, треба змінити структуру навчального процесу так, щоб значно збільшити збудження і помітно зменшити гальмування в корі головного мозку. Це дасть можливість зміцнити знання, уміння і навички, зробити їх надбанням кожного учня на тривалий час.

У пошуках найбільш продуктивної організації навчання у школі № 6 м. Кіровограда (вчитель О. О. Хмура) було проведено такий експеримент в одному з дев'ятих класів на уроках алгебри. Протягом перших трьох місяців навчального року уроки з алгебри проводилися у вівторок і п'ятницю і будувалися за звичайною схемою. У наступні місяці алгебра вивчалася тільки у вівторок на здвоєних уроках. Перший урок присвячувався вивченню нового матеріалу в значно ширшому обсязі, тобто в обсязі двох-трьох уроків при звичайному плануванні. Другий урок весь присвячувався закріпленню нового, його практичному застосуванню.

В результаті експерименту було доведено деякі переваги здвоєного уроку:

1) в умовах здвоєних уроків майже не було випадків невиконання домашніх завдань;

2) теоретичні питання, подані значно повніше, засвоюються учнями свідоміше;

3) вивільнився достатній час для колективного розв'язування задач під керівництвом учителя, напівсамостійно (з коментуванням) і самостійно. На здвоєному уроці можна розв'язати вдвічі більше задач;

4) на уроках, виділених для закріплення теоретичних питань, вчитель міг виявити і ступінь засвоєння учнями матеріалу, і грунтовно перевірити виконання ними домашніх завдань;

5) на здвоєних уроках помітно підвищується усвідомленість і міцність засвоєних знань, умінь і навичок. Засвоївши теоретичний матеріал на першому уроці, учням значно легше відразу ж на другому уроці перейти до самостійного застосування цих знань на практиці.

Психологи стверджують, що процес забування найінтенсивніше відбувається відразу ж після одержання інформації. Оскільки учень, одержавши інформацію на першому уроці, відразу ж закріплює її відповідно підібраними вправами, тим самим попереджуючи процес забування, то слід вважати, що введення здвоєних уроків у процесі вивчення математики цілком відповідає висновкам психології;

6) крім того, виділення спеціальних уроків на вивчення теорії в старших класах поступово готує учнів до навчання у вузах.

Проте не в усіх випадках доцільно здвоювати уроки. Якщо, наприклад, новий матеріал невеликий за обсягом,

то опрацювати і закріпити його можна й за один урок. Трапляються також випадки, коли новий теоретичний матеріал за своїм характером вимагає безпосереднього практичного застосування. Так, вивчаючи тему «Нерівності», кожну властивість нерівностей доцільно відразу ж закріпити відповідними вправами. Так само треба робити і при вивченні властивостей логарифмів та ін.

Зазначені вище переваги здвоєних уроків переконали нас у тому, що в шкільному розкладі один раз на тиждень треба мати здвоєний урок. Ці уроки вчитель може використати на свій розсуд: один урок виділити на вивчення теоретичних питань, а другий для розв'язання задач, якщо цього вимагає навчальний матеріал; або один урок на вивчення алгебри, а другий — на вивчення геометрії, на перевірку знань або на семінарські заняття. При тематичному плануванні матеріалу програми вчитель заздалегідь виділяє здвоєні уроки, намічає обсяг питань, які належить вивчити, і характер вправ для їх закріплення.

При висвітленні кіровоградського досвіду на сторінках педагогічної преси здвоєні уроки називали лекційно-практичними, або теоретично-практичними, уроками, тобто перший урок — це вивчення теорії, а другий — практичне закріплення вивченого на першому уроці. Оскільки вивченню нового матеріалу у багатьох випадках присвячується весь урок, то серед інших методів подачі нового матеріалу мала місце також і шкільна лекція. Звідси і назва — лекційно-практичний урок.

Обсяг матеріалу на першому із здвоєних уроків у практиці кіровоградських учителів був приблизно такий:

1. Арифметична прогресія. Формула загального члена арифметичної прогресії. Властивості суми двох членів прогресії, рівновіддалених від крайніх членів. Формула суми членів арифметичної прогресії. (На розв'язання задач і вправ — 2 *год*).

2. Геометрична прогресія. Формула загального члена геометричної прогресії. Властивості добутку двох членів геометричної прогресії, рівновіддалених від крайніх членів. Формула суми членів геометричної прогресії. (На розв'язання задач і вправ — 5 *год*).

3. Границя суми членів нескінченно спадної геометричної прогресії. (На розв'язання задач і вправ — 1 *год*).

4. Теореми про квадрат сторони, яка лежить проти гост-

рого і тупого кутів у трикутнику (теорему про суму квадратів діагоналей паралелограма учні вивчають самостійно вдома). (На розв'язання задач — 2 *год*).

5. Побудова правильних вписаних і описаних многокутників. Теореми про побудову кола, описаного навколо правильного многокутника і вписаного в правильний многокутник.

6. Означення центрального, внутрішнього і зовнішнього кутів правильного многокутника. Відношення периметрів і площ правильних однойменних многокутників. (На розв'язання задач — 4 *год*).

7. Леми про опуклу ламану лінію і про периметр опуклого многокутника. Означення довжини кола.

8. Відношення довжини кола до діаметра. Обчислення довжини кола. Довжина дуги, яка має $n°$. (На розв'язання задач — 2 *год*).

9. Площа круга. Відношення площ двох кругів. Площа сектора. Площа сегмента. (На розв'язання задач — 2 *год*) і т. д.

Вибір методів вивчення нового матеріалу залежить від його змісту, майстерності вчителя, підготовки учнів, обладнання математичного кабінету та інших обставин.

Серед методів навчання найбільше поширились такі:

а) евристична бесіда;

б) шкільна лекція;

в) самостійне вивчення нового матеріалу за підручником з попереднім колективним розглядом за готовим рисунком основних логічних зв'язків;

г) самостійне вивчення нового матеріалу за підручником на основі виконаного вдома практичного завдання;

д) зв'язний виклад нового матеріалу найбільш підготовленими учнями після попередньої самостійної роботи над підручником;

е) вивчення нового на основі виконання лабораторно-практичних робіт;

є) самостійне вивчення нового матеріалу після попередньої вступної бесіди вчителя та ін.

На одному уроці використовують, як правило, кілька методів і прийомів у їх найдоцільнішому поєднанні.

Наприклад, учитель Г. Ф. Лепитько з Осипенківської середньої школи Запорізької області окремі уроки такого типу розпочинає самостійною роботою учнів над вивченням теоретичних питань за підручником.

Деякі теоретичні питання виносять на початок уроку як проблемні, які учні розв'язують на основі раніше набутих знань і власного досвіду. Так, при вивченні поверхні піраміди вчитель пропонує класу таке завдання: знайти спосіб обчислення поверхні піраміди і сформулювати правило у загальному вигляді. Працюючи над підручником, учні можуть користуватися моделями пірамід усіх видів з шкільного математичного кабінету.

При такому способі засвоєння нових знань учні самостійно міркують, встановлюють певні математичні факти; роль учителя при цьому полягає в умілому спрямуванні навчального процесу, у доповненні, виправленні і узагальненні набутих учнями знань. Іноді вчитель формулює теорему і пропонує довести її за допомогою готового рисунка, не користуючись при цьому підручником, а в окремих випадках пропонує побудувати і рисунок до теореми.

Багато теорем учні доводять самостійно за підручником. Разом з учителем доводять тільки найбільш складні теореми.

Деякі теми програми вчителі доручають викладати на уроці самим учням. Для цього вчитель заздалегідь індивідуально готує найкращих учнів, які, підготувавшись, виступають у ролі вчителя: пояснюють новий матеріал, ілюструють виготовлені ними навчальні посібники, виконують необхідні побудови, відповідають на запитання, поставлені класом у процесі пояснення, роблять узагальнення і висновки.

Багато уроків вивчення нового матеріалу розпочинають розв'язуванням задач. У процесі їх розв'язування розкриваються окремі питання теорії, формулюються певні математичні твердження.

Досить часто під час викладу нового матеріалу вчитель подає питання теорії не за стабільним підручником. Іноді замість того, щоб повторювати підручник, учитель дає тільки глибокий аналіз взаємозв'язків між різними поняттями, уміло використовуючи допоміжну літературу, що має велике значення для навчання у вузах, технікумах та ін.

Для успішного засвоєння нового матеріалу великого значення набули такі допоміжні засоби, як кіно, епідіаскоп, таблиці та ін. Це дає змогу вчителеві унаочнювати свої пояснення, демонструючи потрібні зображення (різні положення фігур, рисунки до задач тощо).

Проте яким би методом не користувався вчитель для по-

дачі нового матеріалу, успішне засвоєння його учнями можливе тільки при умові виконання найкраще підібраних вправ на наступному уроці. Дуже важливо, щоб учитель, готуючись до уроку, підібрав таку систему вправ для закріплення теоретичного матеріалу, на виконанні яких можна було б у доступній формі показати найраціональніші прийоми застосування вивченого матеріалу на практиці. Спочатку задачі або вправи на застосування щойно засвоєного матеріалу вчитель розв'язує сам усно або на дошці, використовуючи моделі, рисунки, графіки, таблиці, дає повний аналіз, необхідні обгрунтування, вказує найраціональніші прийоми, тобто вчить учнів розв'язувати задачі. Після цього учні розв'язують задачі напівсамостійно, з коментуванням, або з попереднім аналізом, або із складанням плану і, нарешті, переходять до самостійного виконання завдань.

Учитель так добирає систему завдань, щоб кожна нова вправа була тісно зв'язана з попередньою, щоб при виконанні вправ учень переборював усе нові й нові труднощі.

К. Д. Ушинський писав: «Усяка нова вправа повинна бути зв'язана з попередньою, спиратися на неї і робити крок вперед» (Твори, т. II, К., вид-во «Радянська школа», 1936, стор. 8).

Підводячи підсумки п'ятирічного досвіду кіровоградських учителів з організації уроків, можна сказати, що здвоєні уроки, або, як ми їх називаємо, теоретико-практична форма побудови уроку, дає можливість найефективніше застосовувати основні принципи радянської дидактики у викладанні математики. На цьому уроці можна найраціональніше використати час на вивчення і закріплення теоретичного матеріалу. У процесі підготовки до таких уроків і на самих уроках є широкі можливості для виявлення і розвитку ініціативи і творчості учнів, використання всіх найефективніших методів навчання.

Теоретико-практична форма уроку забезпечує послідовність між восьмирічною, середньою і вищою школами, відповідає віковим особливостям учнів, чим досягається значно більша міцність і системність засвоюваних знань. На уроках цього типу створюються необхідні умови для зв'язку викладання математики з іншими предметами, виробничим навчанням, життям.

Об'єднуючи, а не розриваючи на частини логічно зв'язані між собою питання математики, вчителі на таких уроках досягли значних успіхів в опануванні предмета старшоклас-

никами, раціональнішого розподілу навчального часу на вивчення теорії, її закріплення і контроль знань учнів. Крім того, вивільнився певний резерв часу для розв'язання задач і прикладів, для самостійної роботи учнів.

Наведемо приклади уроків пояснення нових знань.

Приклад 1. Урок нездвоєний. (Школа № 6 м. Кіровограда, вчитель О. О. Хмура).

Тема. Теорема про три перпендикуляри.

Мета уроку. За допомогою розв'язання задачі підготувати учнів до вивчення теореми про три перпендикуляри, до самостійного доведення цієї теореми за підручником на уроці і оберненої до неї теореми — вдома. Показати на прикладах практичне застосування цієї теореми. Об'єднати на цьому уроці два процеси: засвоєння нового і повторення раніше вивченого матеріалу.

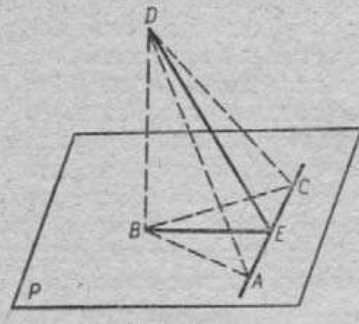


Рис. 6.

Урок розпочинається з самостійної роботи. Учням пропонують задачу: «З вершини найбільшого кута B трикутника ABC проведено перпендикуляр BD до його площини, який дорівнює 4 *м*. Знайти відстань від точки D до більшої сторони трикутника, якщо довжина перпендикуляра BE, опущеного з вершини кута B на цю сторону, дорівнює 3 *м*». Рисунок до задачі виконано на дошці заздалегідь.

Через кілька хвилин знаходять шлях до розв'язання задачі. Учень, якого викликано до дошки, пояснює, що для визначення відстані від точки D до сторони AC трикутника ABC треба сполучити цю точку з точкою E, а потім з прямокутного трикутника DBE за теоремою Піфагора обчислити DE.

Після цього вчитель підводить учнів до висновку: оскільки найкоротша відстань точки від прямої вимірюється перпендикуляром, проведеним з цієї точки на дану пряму, то для обгрунтування розв'язку треба довести, що відрізки DE і AC перпендикулярні.

Потім учитель пропонує учням дати означення проекції

похилої на площину і назвати проекцію похилої DE на площину P (рис. 6). Учні, пригадуючи попередній матеріал, самостійно формулюють означення і називають відрізок BE проекцією DE на площину P.

— А що вам відомо про цю проекцію?— запитує вчитель.

Учні відповідають, що за умовами задачі вона дорівнює 3 *м* і перпендикулярна до AC.

Нарешті, ставиться заключне запитання:

— Яку властивість похилої DE (проекція якої $BE \perp AC$) треба довести, щоб нашу задачу можна було вважати повністю розв'язаною?

Учні відповідають: «Треба довести, що коли проекція похилої перпендикулярна до AC, то й сама похила перпендикулярна до AC».

Потім учням пропонують протягом 3—4 *хв* самостійно ознайомитися з доведенням теореми про три перпендикуляри за підручником.

Цей матеріал учні засвоюють легко. Розв'язуючи задачу, вони вже фактично наблизилися до доведення теореми.

Примітка. Учні мають спеціальний зошит для роботи над підручником і додатковою літературою, куди в класі і вдома в процесі самостійної роботи заносять найважливіші, найістотніші питання вивчуваного матеріалу, записують хід доведення теорем, виведення формул, виконують потрібні рисунки та ін. Це сприяє виробленню умінь і навичок правильно користуватися стабільними підручниками і додатковою літературою, грунтовніше, глибше і свідоміше вивчати математику.

Учні довели теорему не за окремим рисунком, як це звичайно буває, а за тим, який вони виконали до запропонованої на початку уроку задачі.

Така методика сприяє свідомішому і глибшому засвоєнню нового матеріалу, розвиткові умінь і навичок учнів. Пояснення нового матеріалу на рисунках до задач допомагає значно краще застосовувати теорію на практиці.

Деякі учні доводили цю теорему не так, як у підручнику А. П. Кисельова. Наводимо це доведення.

Дано: на пл. P $\triangle ABC$, $AB = BC$, $BE \perp AC$.

Треба довести: $DE \perp AC$.

Доведення. Проведемо з вершини B $\triangle ABC$ (рис. 6) перпендикуляр BD до площини P і сполучимо точки A, E і C з D. У рівнобедреному $\triangle ABC$ висота BE є також медіаною, тому $AE = CE$.

Розглянемо $\triangle ADC$. У ньому $AD = DC$ як похилі до площини P, що мають відповідно рівні проекції AB і BC.

Отже, $\triangle ADC$ рівнобедрений і DE є медіаною і висотою в цьому трикутнику, тобто $DE \perp AC$, що й треба було довести.

Учитель підкреслює, що ця теорема називається теоремою про три перпендикуляри. При цьому учні встановлюють, про які три перпендикуляри йдеться в теоремі.

Потім учитель вивішує плакат і коротко розповідає про практичне застосування цієї теореми. Так, при спорудженні дахових перекриттів крокву встановлюють перпендикулярно до карниза стіни, тому і нога крокви перпендикулярна до карниза стіни.

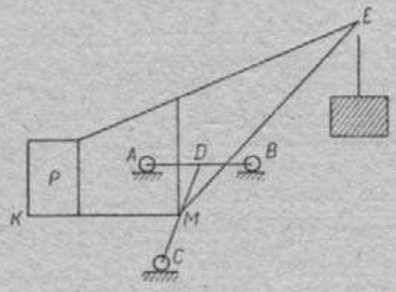


Рис. 7.

При встановленні підйомного крана на триколісному візку (рис. 7) стріла ME підйомного крана повинна бути перпендикулярною до осі DC візка, тому що KM — поздовжня вісь симетрії площинки — перпендикулярна до осі візка.

Підкреслюється, що теорему про три перпендикуляри часто застосовують також для логічного обгрунтування взаємного розміщення елементів геометричних фігур у просторі при розв'язанні багатьох задач.

На застосування вивченої теореми на практиці вчитель розв'язує задачу № 20, § 1 із збірника задач Н. Рибкіна. Після цього учні розв'язують задачу № 22 (1), § 1 (Н. Рибкін, ч. II).

Наприкінці уроку повідомляють оцінки і коротко характеризують якість відповідей. Вдома пропонують вивчити за підручником обернену теорему про три перпендикуляри; розв'язати задачу № 22 (3) із збірника задач Рибкіна, ч. II; повторити формулу Герона; виготовити модель, за допомогою якої можна було б проілюструвати теорему про три перпендикуляри.

Щоб полегшити самостійне вивчення теоретичного матеріалу вдома, у класі учням було дано такі запитання:

1. Яка теорема називається оберненою до даної?

2. Як сформулювати обернену теорему до теореми про три перпендикуляри?

3. Що дано і що треба довести в оберненій теоремі про три перпендикуляри?

4. В якій послідовності треба доводити обернену теорему?

В усній формі коротко проаналізували задачу, запропоновану додому. Для цього з'ясували зміст задачі, виконали схематичний рисунок, встановили, який кут у трикутнику є найбільшим, чим визначають відстань від точки до прямої, що дано в задачі і що треба визначити. Встановили також, що нас цікавить саме така похила, яку проведено з точки простору до площини і проекція якої є перпендикулярною до більшої сторони трикутника.

Крім обов'язкового домашнього завдання, для бажаючих було запропоновано задачу № 23 (Н. Рибкін, ч. II, § I).

Приклад 2. Урок нездвоєний (Школа № 6 м. Кіровограда, вчитель О. О. Хмура).

Тема. Теорема додавання для синуса.

Мета уроку. Вивести формулу для синуса суми двох аргументів, органічно поєднуючи вивчення нового з повторенням.

Урок розпочався із самостійної роботи у формі математичного диктанту. Учням запропонували в письмовій формі відповісти на ряд запитань, які мають не тільки контролюючий, а й навчальний характер. Щоб заощадити час і підвищити ефективність самостійної роботи учнів, запитання і відповіді на них можна підготувати заздалегідь на плакаті або на переносній дошці. Верхню частину плаката слід закріпити кнопками, а нижню залишити вільною, щоб можна було, користуючись однією кнопкою, легко закривати і відкривати відповідні запитання і відповіді на них.

Спочатку вчитель відкриває перше запитання: «Коли два кути (дві дуги) α і β будуть взаємно доповняльними до $\frac{\pi}{2}$?».

Під час підготовки відповіді на це запитання, як і на всі наступні, вчитель уважно слідкує за роботою кожного учня, виявляючи одночасно рівень знань і якість виконання домашнього завдання, а також допомагає тим, хто цього потребує.

Переконавшись, що всі учні свідомо відповіли на перше запитання, вчитель відкриває на плакаті відповідь на нього:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Впевнившись у тому, що відповіді збігаються, учні підбадьорюються і ще активніше включаються в роботу.

На плакаті відкрито друге запитання: «Який кут доповнює кут $\alpha + \beta$ до $\frac{\pi}{2}$?».

Відповідь на нього: $\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$, знайдену учнями самостійно, також порівнюють з відповіддю на плакаті.

Третє запитання було таке: «Чому аргументи $(\alpha + \beta)$ і $\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$ є взаємно доповняльними до $\frac{\pi}{2}$?».

Щоб відповісти на четверте запитання: «Чому дорівнює синус першого з цих двох взаємно доповняльних до $\frac{\pi}{2}$ аргументів?», учням треба пригадати лему, яку було вивчено на попередньому уроці, про те, що косинус одного з двох взаємно доповняльних до $\frac{\pi}{2}$ аргументів дорівнює синусу другого.

Відповідь:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] \ldots \qquad (1)$$

Далі учням пропонують назвати кут, доповняльний до $\frac{\pi}{2}$ відносно $\alpha + \beta$, після чого на плакаті відкривають таке запитання: «Подати аргумент $\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$ як різницю аргументу, доповняльного до $\frac{\pi}{2}$ відносно α, і аргументу β».

Після виконання необхідних перетворень учням показують відповідь на плакаті:

$$\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta.$$

Щоб відповісти на наступне запитання: «Чому дорівнює косинус різниці двох аргументів $\frac{\pi}{2} - \alpha$ і β?», учні застосовують відому їм формулу косинуса різниці двох аргументів і знаходять потрібну рівність, яку для порівняння записано також на плакаті:

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta.$$

Користуючись формулою доповняльних аргументів, учні перетворюють праву частину рівності і знаходять:

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Учитель пропонує зіставити другу і першу рівності і відповісти на запитання: «Чому дорівнює синус суми двох аргументів α і β?».

Відповідь знайдено таку:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Так у процесі самостійної роботи учні вивели невідому їм раніще рівність, яка і називається теоремою додавання для синуса.

Один з учнів, повністю використавши відкритий плакат, узагальнив доведення цієї теореми.

Підводячи підсумки роботи на уроці, вчитель підкреслив, що учні довели теорему самостійно, відзначив тих, хто в процесі самостійної роботи виявив хороші математичні знання, а також вказав на недоліки і прогалини в знаннях окремих учнів.

Після цього один з учнів виконав на дошці вправу на знаходження синуса суми двох кутів α і β, замінюючи у виведеній формулі кут β на $-\beta$. Решта учнів виконала цю саму вправу в зошитах і, отже, вивела нову формулу, закріплюючи тільки що виведену.

Вчитель наголосив на значенні цих формул для дальшого вивчення математики і вказав на їх практичне застосування, особливо в геодезії.

Далі клас переходить до розв'язування практичних вправ. Спочатку колективно обчислюють синус кута 105°, застосовуючи тільки що доведену теорему:

$$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \ldots$$

Після цього один з учнів на дошці розв'язує одну із вправ, яку було задано на цей урок, обчислює косинус кута 15° із застосуванням теореми додавання для синуса:

$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \ldots$$

Учневі, який відповідає біля дошки, і всьому класу пропонують порівняти добуті відповіді з тими, які одержали учні, виконуючи ці вправи вдома.

Решта учнів самостійно виконує іншу вправу домашнього завдання: обчислює таким самим способом косинус кута 105°:

$$\cos 105° = \sin(-15°) = -\sin 15° = \ldots$$

Так само повторюють ще кілька домашніх вправ, аналогічних розглянутим, з необхідним теоретичним обгрунтуванням. Після цього учні самостійно розв'язують ряд прикладів із збірника задач П. В. Стратілатова: № 164 (2), 165, 174 (1, 2), 175 (3), які вимагають застосування як нового, так і раніше вивченого матеріалу.

Під час цієї роботи вчитель, подаючи в міру потреби індивідуальну допомогу учням, привчає їх працювати самостійно.

Завдання додому: повторити вимірювання кутів і дуг; виконати вправи 174 (3, 4), 175 (5), 177 (4), 182 (2) із збірника задач П. В. Стратілатова і самостійно довести теорему додавання для тангенса.

Щоб полегшити виконання домашнього завдання, у класі повторюють визначення тангенса кута і застосовують його для тангенса кута $\alpha + \beta$, встановлюють такі припустимі значення α і β, при яких тангенси дуг α, β і $\alpha + \beta$ мають смисл.

Визначаючи тангенс кута $\alpha + \beta$ через синус і косинус цього самого кута і використовуючи основну властивість звичайних дробів, учням легко довести теорему додавання для тангенса. Потім самостійно обчислюють тангенс кута 105°, використовуючи для цього перший раз тільки що доведену теорему, а другий раз — теореми додавання для синуса і косинуса. Наприкінці уроку було повторено ще радіанне вимірювання кутів і дуг, без чого не можна обійтися при виконанні домашніх завдань.

Отже, учні ознайомилися з матеріалом наступного уроку. Одночасно вони закріпили і поглибили свої знання, набуті на цьому і попередньому уроках. Таким чином, ми частково звільнили їх від виконання домашнього завдання і створили умови для кращого засвоєння матеріалу на наступному уроці.

Протягом всього уроку вчитель уважно слідкував за роботою учнів, за тим, наскільки активно і свідомо кожний з них використовує раніше набуті знання і засвоює нові. Наприкінці уроку вчитель підвів підсумки самостійної роботи і оцінив знання найбільш підготовлених учнів.

Приклад 3 *. Урок здвоєний (Кремгесівська школа № 2, учитель В. Г. Коваленко).

Тема. Арифметична прогресія.

Обладнання уроку

1. Таблиця шляху, пройденого вільно падаючим тілом.
2. Таблиця східчастої фігури для демонстрування арифметичної прогресії, формули n-го члена прогресії, властивості членів і суми членів прогресії.
3. На переносній дошці рисунок східчастого шківа токарного верстата для вимірювання швидкості обертання шпинделя.

Хід уроку

На попередньому уроці учням було дано такі завдання:

1. Записати 10 членів числової послідовності за формулою загального члена: $a_n = -3n^2 + 10$; $a_n = -2^n + 1$.
2. Записати формулу загального члена таких послідовностей:

1, 3, 5, 7, 9 ... ...$2n - 1$, ...

2, 4, 6, 8, 10, ...$2n$,..., де $n = 1, 2, 3, 4, ..$

Учитель проводить фронтальну перевірку виконання домашнього завдання.

Учитель. Дайте означення числової послідовності.

Учень. Змінна, яка набирає всі свої значення в певному, позначеному номерами порядку, називається числовою послідовністю.

Учитель. Що можна сказати про кожний член числової послідовності?

Учень. Кожний член числової послідовності є функцією свого порядкового номера.

Учитель. Зверніть увагу на таблицю шляхів, пройдених вільно падаючим тілом за кожну секунду. Прискорення вільного падіння $q = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

Секунди	Шлях, пройдений тілом, у *м*	Інший вигляд запису пройденого шляху
1	$S_1 = 4{,}9$	$S_1 = 4{,}9$
2	$S_2 = 4{,}9 + 9{,}8 = 14{,}7$	$S_2 = 4{,}9 + 9{,}8$
3	$S_3 = 14{,}7 + 9{,}8 = 24{,}5$	$S_3 = 4{,}9 + 9{,}8 + 9{,}8$
4	$S_4 = 24{,}5 + 9{,}8 = 34{,}3$	$S_4 = 4{,}9 + 9{,}8 + 9{,}8 + 9{,}8$
5	$S_5 = 34{,}3 + 9{,}8 = 44{,}1$	$S_5 = 4{,}9 + 9{,}8 + 9{,}8 + 9{,}8 + 9{,}8$

* Подаємо стенографічний запис уроку.

Перший учень визначає, за яким законом записано числову послідовність:

4,9; 14,7; 24,5; 34,3; 44,1; ... $4,9 + 9,8(n - 1)$, ... ,

а другий учень встановлює, що для одержання кожного наступного члена цієї числової послідовності треба до попереднього додати стале число 9,8.

Далі пропонують учням придумати зростаючі і спадні послідовності. Приклади послідовностей записують у зошитах і на дошці:

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots, 3 + 2(n - 1), \ldots \quad (1)$$

$$12, 10, 8, 6, 4, \ldots, 12 - 2(n - 1), \ldots \quad (2)$$

Учитель підкреслює, що такі послідовності називаються арифметичними прогресіями. Перед ними ставлять знак ÷ а для їх загального запису введено такі позначення:

a_1 — перший член прогресії;

a_n — крайній член прогресії;

n — число членів прогресії;

d — стале число (різниця прогресії);

S_n — сума n членів прогресії.

Учні самостійно доводять, що

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \ldots, \quad (1)$$

і висловлюють гіпотезу, що всякий член прогресії дорівнює сумі першого члена і добутку її різниці на кількість членів, які йому передують.

Гіпотеза правильна при $n = 1, 2, 3, 4$. Робимо припущення, говорить учитель, що вона правильна при $n = k$, і доведемо, що вона справедлива також при $n = k + 1$.

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + d(k - 1) + d = a_1 + kd - d + d = \\ = a_1 + kd.$$

Отже, формула (1) правильна для будь-якого натурального числа n. Учитель підкреслює, що метод, яким вони користувалися, називається методом математичної індукції, і після цього коротко розповідає про історію арифметичної прогресії, зачитує задачу, яку було складено за 2000 років до нашої ери, вказавши при цьому, що в Росії такого типу задачі зустрічалися в «Русской правде» вже в XI ст.

Учитель. Як знайти середнє арифметичне кількох чисел?

Учень. Середнє арифметичне кількох чисел дорівнює сумі цих чисел, поділеній на їх кількість.

Учитель. Подивіться на записані нами прогресії (1) і (2) і вкажіть на залежність між трьома будь-якими членами прогресії.

Учень. Якщо додати перший і третій члени і поділити на два, то другий член і буде середнім арифметичним першого і третього членів:

$$\frac{3+7}{2}=5; \quad \frac{12+8}{2}=10; \quad \frac{7+11}{2}=9 \text{ і т. д.}$$

Учитель. За цією властивістю членів така числова послідовність і одержала назву арифметичної прогресії. Зверніть увагу на чотири члени, які стоять поряд, і вкажіть на властивість суми членів, рівновіддалених від кінців.

Учень. Сума першого і четвертого членів дорівнює сумі другого і третього членів:

$$3+9=5+7; \quad 12+6=10+8.$$

Учитель. А якщо взяти не чотири члени прогресії, а п'ять?

Учень. Тоді $3+11=5+9$; $12+4=10+6$, а члени 5-й, 9-й, 10-й і 6-й називаються рівновіддаленими від кінців, а 3-й, 11-й, 12-й, і 14-й — крайніми.

Учитель. Як у загальному вигляді записати цю властивість членів для прогресії:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ \ldots;\ a_{n-1};\ a_n?$$

Один учень відповідає, а інші записують у зошити:

$$\frac{a_1+a_3}{2}=a_2;$$

$$\frac{a_3+a_5}{2}=a_4;$$

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1};$$

$$a_1+a_n=a_3+a_{n-2}.$$

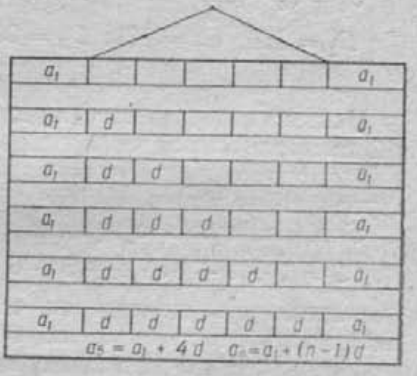


Рис. 8.

Далі учитель пропонує звернутися до таблиці, на якій у вигляді прямокутників подано прогресію (рис. 8).

Один з учнів виходить до дошки і, користуючись таблицею, пояснює, а решта записує формулу загального члена прогресії. На цій самій таблиці встановлюють властивість

членів прогресії. Для закріплення формули загального члена арифметичної прогресії класові пропонують рисунок східчастих шківів для змінювання швидкості обертання шпинделя токарного верстата (рис. 9).

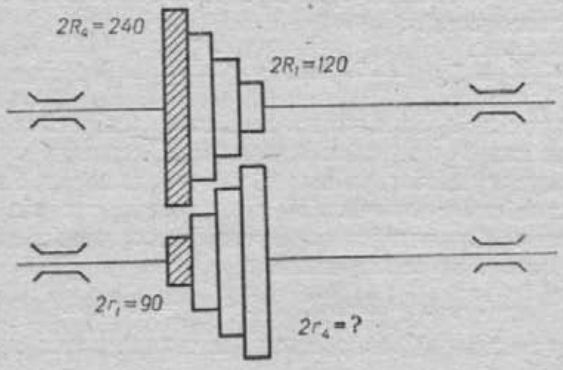


Рис. 9.

Учень пропонує таке розв'язання цієї задачі:

Відомо, що $a_1 = 120$, $a_4 = 240$, $d = ?$

$$a_4 = a_1 + 3d; \quad 240 = 120 + 3d; \quad d = \frac{240 - 120}{3} = 40.$$

$$D_1 = 120;\ D_2 = 160;\ D_3 = 200;\ D_4 = 240;\ d_1 = 90;$$

$$d_2 = 130;\ d_3 = 170;\ d_4 = 210.$$

Учитель наводить коротку історію про те, як у початковій школі, де вчився майбутній німецький математик Гаусс, вчитель запропонував учням знайти суму чисел від 1 до 100. Гаусс негайно відповів: 5050.

Учні записують суму:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

і встановлюють, що доданки становлять прогресію, члени якої мають властивості, які було вивчено раніше.

Учень розв'язує цю задачу так. Сума крайніх членів 101 і членів, рівновіддалених від кінців, також 101, а таких пар буде 50, тому $101 \cdot 50 = 5050$.

Учитель. Як записати формулу, якщо в загальному вигляді треба знайти суму n членів прогресії?

Один учень записує на дошці формулу $S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$, а решта — в зошитах.

Учитель. Знайдемо суму 10 членів записаних прогресій:

÷ 3; 5; 7; 9; 11; ... $3 + 2(n - 1)$ ...;

÷ 12; 10; 8; 6; 4; ... $12 - 2(n - 1)$ ...

$$a_{10} = 3 + 2 \cdot 9 = 21 \quad S_{10} = (3 + 21) \cdot \frac{10}{2} = 24 \cdot 5 = 120$$

$$a_{10} = 12 + (-2) \cdot 9 = -6 \quad S_{10} = (12 - 6) \cdot 5 = 30.$$

Далі учням пропонують самостійну роботу. На прямокутній системі координат знайти точки, які відповідали б довжині шляху S_1; S_2; S_3; S_4; S_5; S_6 для таблиці шляхів (рис. 10). Учитель нагадує, що $a_n = a_1 + d(n - 1)$ є функцією свого порядкового номера, де аргумент набирає значень 1, 2, 3,... Якщо візьмемо рівняння $y = kx + b$, то тут ми діставатимемо значення y для будь-якого x, і тому графік є геометричним місцем точок — прямою лінією, тоді як для $S_n = S_1 + 9{,}8(n - 1)$ (значення $n = 1, 2, 3, \ldots$) маємо окремі точки.

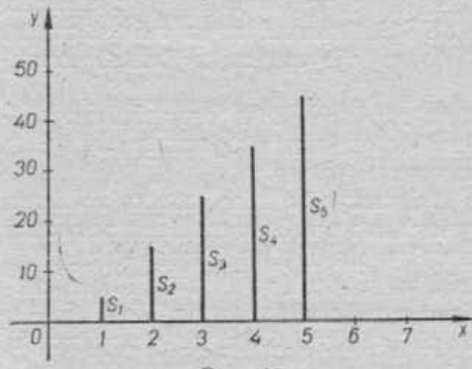


Рис. 10.

Завдання додому: § 74, 75, А. П. Кисельов, ч. II; вивести формулу суми членів арифметичної прогресії методом математичної індукції (П. О. Ларічев, ч. II, № 713 (2, 3), 714 (6), 724 (1).

Наступним був урок тренувальних вправ.

Приклад 4. (Школа № 27 м. Кіровограда, вчитель М. С. Пахманов).

Тема уроку. Геометрична прогресія (на прикладі вивчення коробки швидкостей токарного верстата).

Мета уроку. Показати, як практично застосовують геометричну прогресію безпосередньо на виробництві.

На попередньому уроці учням було запропоновано самостійно ознайомитися вдома за підручником з геометричним рядом чисел.

Урок у цеху розпочався з розповіді вчителя про те, що коробка швидкостей — це механізм, за допомогою якого

змінюється швидкість автомашини, трактора, шпинделя металорізального верстата або інших машин. Коробка швидкостей, продовжує вчитель, є складним і важливим механізмом багатьох машин.

Далі вчитель пропонує оглянути один із верстатів. Коробка швидкостей верстата, що міститься в корпусі передньої бабки, є сукупністю зв'язаних між собою зубчастих коліс і валів. На стінці бабки розміщені ручки керування, які з'єднані системою важелів з шестернями коробки швидкостей. Переміщення однієї з ручок з одного в інше положення спричинює всередині коробки розчеплення однієї пари шестерень, а зубці іншої пари зчіплюються, і шпиндель верстата почне обертатися з іншою швидкістю.

Біля кожної ручки на передній бабці прикріплено таблиці, на яких позначено швидкості обертання шпинделя при тому чи іншому положенні ручки.

На перший погляд, продовжує вчитель, важко помітити певну закономірність у числах на таблицях. Вони здаються нам навіть випадковими. Тут ми бачимо і парні числа 20 і 40, і непарні 25 і 63, і навіть дробові, такі як 31,5. Розмістимо всі числа, які вказано в таблиці, так: 20; 25; 31,5; 40; 50; 63; 80; 100; 125; 160; 200; 250; 315 і т. д. (у порядку їх зростання).

Учитель пропонує учням самостійно знайти закономірність, яка існує в цьому ряді чисел. Виконуючи ділення кожного числа ряду на попереднє число, наприклад, 315 на 250, 250 на 200, 80 на 63 і т. д., учні дістали одне й те саме число — 1,26.

Старшокласники згадують, що ряд чисел, в якому кожне наступне число дорівнює попередньому, помноженому на сталий множник, є не що інше, як геометрична прогресія, а число 1,26 у цьому випадку є її знаменником. Вони роблять висновок, що шпиндель верстата обертається не з випадковими, а цілком закономірними швидкостями.

Після цього вчитель спиняється на історії цього питання. Він указує, що до появи у 1876 р. першої наукової праці російського академіка А. В. Гадоліна «Про зміну швидкостей обертання шпинделя в токарних і свердлильних верстатах» конструктори, встановивши найбільшу і найменшу швидкості, з якими повинен був обертатися шпиндель нового верстата, при виборі проміжних ступенів швидкостей часто виявлялися безпорадними. Одні встановлювали ці

ступені на однакових один від одного відрізках, інші — на нерівних, тобто найрізноманітнішими способами.

Проте жоден з цих розв'язків не давав позитивних результатів при експлуатації верстата. Адже обробка деталей різних розмірів при випадковому ряді швидкостей обертання шпинделя в економічному відношенні була нерівноцінною. Під час виготовлення, наприклад, невеликих деталей їх обробляли майже з такою швидкістю, яка була одержана при розрахунку, і, навпаки, обточували великі деталі з швидкістю обертання шпинделя, набагато меншою, ніж розрахункова. Крім того, довільно складені «ступені» швидкостей утруднювали конструювання коробки і ускладнювали обслуговування верстатів.

Учитель підкреслив, що академік А. В. Гадолін на підставі точних математичних розрахунків довів, що верстати слід будувати із ступенями швидкостей, які розміщені за геометричною прогресією. У цьому випадку вимушене зменшення швидкостей обробки, що звичайно буває через те, що не завжди можна знайти серед ступенів швидкості ту, яка одержана розрахунком, не перевищуватиме певної, наперед заданої величини. Отже, економічність обробки деталі у цьому випадку буде однією й тією самою, незалежно від розмірів деталі.

Закон Гадоліна, продовжує вчитель, тепер використовують усі конструктори-верстатобудівники для проектування нових верстатів. Геометричний ряд швидкостей спростив конструкцію механізмів і обслуговування верстатів.

Учитель підкреслює, що був час, коли кожний конструктор визначав на свій розсуд розміри деталей, створюваних ним машин. Такий різнобій в розмірах деталей дорого обходився державі. Вартість машин набагато зросла, оскільки майже для кожної з них треба було виготовляти найрізноманітніший інструмент, який для інших машин використовувався рідко.

Щоб зробити, наприклад, точний отвір у деталі, потрібні свердло, зенкер, дві розвертки і кілька калібрів-пробок. Підраховано, що для виготовлення тільки одного точного отвору в деталі потрібен набір інструментів вартістю кілька карбованців.

Тому перед конструкторами було поставлено вимогу: обмежити кількість застосовуваних розмірів, особливо таких, як діаметри отворів, різьби, розміри зубів шестерень, головок гвинтів і гайок та інших деталей. Було створено

стандартні різьби, модулі стандартних коліс, розміри зіву ключів під гвинти і гайки тощо.

Далі вчитель розповідає про труднощі, з якими зустрілися конструктори при обмеженні розмірів діаметрів отворів і довжини деяких деталей. Проте і тут допомогла геометрична прогресія. Її було використано для складання обмеженого ряду «нормальних» чисел, якими конструктори користувалися при визначенні розмірів деталей. Знаменником для складання першого, найбільш щільного ряду нормальних чисел вибрали число $\sqrt[40]{10} = 1{,}06$. Геометрична прогресія з таким знаменником становила ряд чисел, який давав досить поступове наростання розмірів і міг задовольнити потреби навіть тих машин, в яких значні відхилення розмірів деталей від розрахункових значень, як правило, неприпустимі внаслідок помітного збільшення габаритів або ваги всієї машини.

Конструкторові тепер не треба було запам'ятовувати великої кількості чисел ряду, починаючи від частки міліметра і до кількох тисяч міліметрів. Йому досить було знайти тільки перші сорок чисел, решту можна було знайти простим множенням або діленням їх на 10, 100 або 1000.

З першого, найбільш численного ряду «нормальних» чисел було складено ще більш обмежені, також закономірні ряди чисел. Так, наприклад, наступний обмежений ряд чисел було складено з першого шляхом вибору з нього чисел через одне. Внаслідок цього одержано геометричний ряд «нормальних» чисел із знаменником 1,12.

Вибравши з першого ряду тільки кожне четверте число, склали ще більш обмежений геометричний ряд чисел із знаменником 1,26 і т. д.

— Ось чому,— підкреслює вчитель, демонструючи наявні в цеху деталі, — є закономірний математичний зв'язок і між дуже малим отвором у кришці приладу, і дуже великим отвором у корпусі машини.

Далі вчитель робить узагальнення, підкреслюючи, що створення єдиної системи «нормальних» чисел разом з розробленою єдиною системою допустимих відхилень від заданих конструктором розмірів мало дуже важливе значення для розвитку техніки. Завдяки цьому стало можливим будувати спеціальні заводи для масового виробництва ріжучих, монтажних і вимірювальних інструментів, підшипників, шестерень і т. д.

Нарешті вчитель запропонував окремим групам учнів практично встановити зв'язок чисел на таблицях кількох металорізальних верстатів. Наприклад, користуючись таблицею швидкостей токарного верстата 1Д63А, яка має такий ряд чисел: 14, 18, 24, 38, 48, 60, 75, 95, 118, 150, 190, 230, 380, 475, 600, 750, учні в результаті обчислень встановили, що цей ряд чисел є геометричною прогресією. У цьому переконалася й решта учнів, яка робила обчислення на інших верстатах.

На цих уроках старшокласники усвідомили, наскільки широко застосовують геометричний ряд чисел на практиці, відчули неоціненне значення не тільки геометричного ряду чисел, а й математики взагалі.

Учням було запропоновано узагальнити вдома матеріал про практичне застосування геометричної прогресії і виконати завдання з таблицями швидкостей, узятих з токарних верстатів.

Наступний урок з алгебри був здвоєний. Перший з них було присвячено вивченню теорії в такому обсязі: стандартні позначення геометричної прогресії; властивості членів геометричної прогресії; виведення формули для будь-якого члена прогресії і для суми її членів. Другий урок відводився для тренувальних вправ.

Приклад 5. Урок здвоєний (Богданівська школа Знам'янського району, вчитель Г. С. Шевченко).

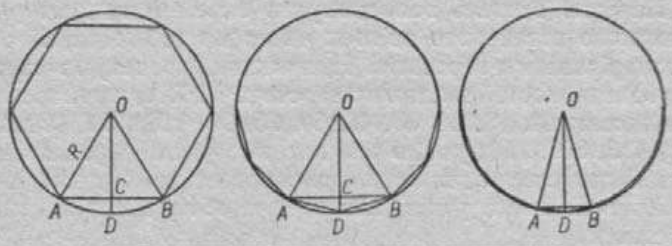
Тема уроку. Площа круга і його частин.

Мета уроку. Вивести формули для обчислення площі круга і його частин; навчити учнів самостійно застосовувати знання при розв'язуванні задач.

Урок розпочався з повторення означення довжини кола як границі, до якої прямує змінний периметр правильного вписаного в це коло многокутника або описаного навколо нього, коли число сторін його необмежено подвоюється. Вміючи обчислювати довжину кіл різних радіусів, ми можемо вивести формулу для обчислення площі, обмеженої колом, тобто площі круга.

Учитель вивішує таблицю «Границя сторони і границя апофеми правильного вписаного многокутника при необмеженому подвоєнні числа його сторін». (Цю таблицю використовували також при вивченні теми «Довжина кола»).

Учням ставлять запитання: Як поводять себе радіус кола, апофема і сторона правильного вписаного многокутника при необмеженому подвоєнні числа його сторін?



$\lim\limits_{n \to \infty} a_n =$	$\lim\limits_{n \to \infty} h_n =$

В і д п о в і д ь. Радіус — величина стала, а сторона і апофема — змінні величини, причому апофема, зростаючи, прямує до довжини радіуса, тобто обмежена зверху, а сторона, зменшуючись, прямує до нуля, тобто обмежена знизу. На підставі ознаки Вейєрштрасса можна стверджувати, що апофема і сторона правильного вписаного многокутника при необмеженому подвоєнні числа сторін мають границі.

Доведемо, говорить учитель, що $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$, а $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = R$. З $\triangle AOC$ дістаємо: $OA - OC < AC$, або $OA - OC < \frac{AB}{2}$, тобто $R - h_n < \frac{a_n}{2}$. Тепер необмежено подвоюватимемо число сторін правильного вписаного многокутника. Через те що $a_n < \smile ADB = \frac{2\pi R}{n} = 2\pi R \cdot \frac{1}{n}$, то можна знайти значення границі $2\pi R \cdot \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \to \infty} 2\pi R \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} 2\pi R \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 2\pi R \cdot 0 = 0.$$

Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2\pi R}{n} = 0$, то і $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Розглянемо різницю $R - h_n$. Як було доведено раніше, ця різниця прямує до нуля при необмеженому подвоєнні числа сторін многокутника, а це означає, що

$$\lim_{n \to \infty} h_n = R.$$

З таблиці учні виписують у зошити границі змінних величин, заповнюючи пропущені величини. Після цього вони записують означення площі круга: «За площу круга вва-

жають границю послідовності площ правильних вписаних або описаних многокутників, коли число їх сторін необмежено подвоюється».

Один з учнів на дошці записує формулу для обчислення площі правильного вписаного многокутника:

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n \cdot h_n.$$

Інший учень знаходить $\lim\limits_{n \to \infty} Q_n$:

Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = C$, а $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = R$, то $\lim\limits_{n \to \infty} Q_n =$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} P_n \cdot h_n \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} P_n \cdot \lim_{n \to \infty} h_n = \frac{1}{2} C \cdot R.$$

Отже, $\lim\limits_{n \to \infty} Q_n = \frac{1}{2} C \cdot R$. Учитель підкреслює, що цю границю і беруть за площу круга. Позначивши числове значення границі через S, маємо:

$$S = \frac{1}{2} C \cdot R \text{ або } S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2.$$

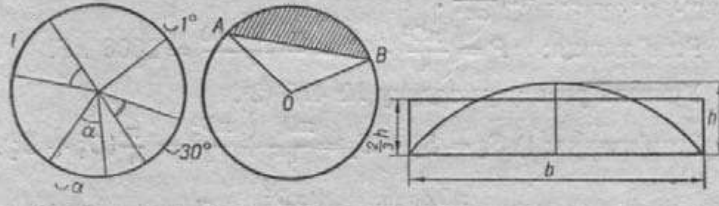
Через діаметр формулу площі круга можна записати так:

$$S = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Далі учні самостійно за підручником вивчили наслідок: «Площі кругів відносяться як квадрати радіусів або діаметрів».

Після цього учні за допомогою вчителя визначають площу сектора, користуючись таблицею «Площа сектора і сегмента», і самостійно записують відповіді:

$$S_{(\smile 1^\circ)} = \frac{\pi R^2}{360}; \quad S_{(\smile 30^\circ)} = \frac{\pi R^2 \cdot 30}{360}; \quad S_{(\alpha)} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360}.$$



Останню рівність вони записують так:

$$S_{(\alpha)} = \frac{\pi R \alpha}{360} \cdot \frac{R}{2} = l \cdot \frac{R}{2} \text{ і, отже, } S_l = l \cdot \frac{R}{2}.$$

Учні роблять висновок: площа сектора дорівнює добутку довжини його дуги на половину радіуса. Далі, користуючись тією самою таблицею «Площа сектора і сегмента», учні самостійно обчислюють площу сегмента як різницю площ сектора і трикутника, обмеженого радіусами і хордою, яка відповідає дузі сегмента. Учитель вказує, що коли градусна величина дуги l менша 50°, то площу сегмента можна обчислити за наближеними формулами $S = \frac{2}{3}\ bh$ і $S = \frac{2}{3}\ bh + \frac{h^3}{2b}$.

Далі один з учнів на дошці, а решта в зошитах записує усі формули в таку таблицю:

Площа круга	Площа сектора	Площа сегмента
$S = \frac{1}{2}\ CR$	$S\ (\smile 1^\circ) = \frac{\pi R^2}{360}$	$S_{сегм} = S_{сект} - S_\Delta$
$S = \pi R^2$	$S\ (\alpha) = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$	$S = \frac{2}{3}\ bh$
$S = \frac{1}{4}\ \pi D^2$	$S_l = l\ \frac{R}{2}$	$S = \frac{2}{3}\ bh + \frac{h^3}{2b}$

Другий урок було повністю відведено для тренувальних вправ. Учням роздали моделі циліндрів і конусів. Безпосереднім вимірюванням діаметрів кругів вони обчислюють площі основ циліндрів і конусів. Частина учнів обчислювала площу перерізів поршнів двигунів автомашин і тракторів.

Після цього колективно розв'язали таку задачу:

Визначити силу тиску газів у циліндрі на 1 поршень автомашини *ГАЗ*-63, якщо діаметр днища дорівнює 8 *см* (точніше 82 *мм*), а тиск газів у циліндрі на початку робочого циклу дорівнює 40 $\frac{кГ}{см^2}$.

Розв'язання: $P = \frac{\pi D^2}{4} \cdot 40 = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 40}{4} \approx 2000\ кГ$.

Учитель розв'язує задачу № 475 (2).

Розв'язання: 1) $S_3 = S_1 + S_2 = \frac{\pi D_1^2}{4} + \frac{\pi D_2^2}{4} = \frac{\pi}{4}(D_1^2 + D_2^2)$.

2) Оскільки $S_3 = \frac{\pi D_3^2}{4}$, то $\frac{\pi D_3^2}{4} = \frac{\pi}{4}\ (D_1^2 + D_2^2)$ або $D_3^2 = D_1^2 + D_2^2$, звідси $D_3 = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$.

3) Обчислюємо D_3 за числовими значеннями D_1 і D_2

$$D_3 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \ (см).$$

Учитель узагальнює, що діаметри трьох труб зв'язані між собою залежністю, яка розкрита в теоремі Піфагора.

Потім розв'язують задачу, в якій діаметри двох труб 3 *см* і 4 *см*. (Відповідь 5 *см*).

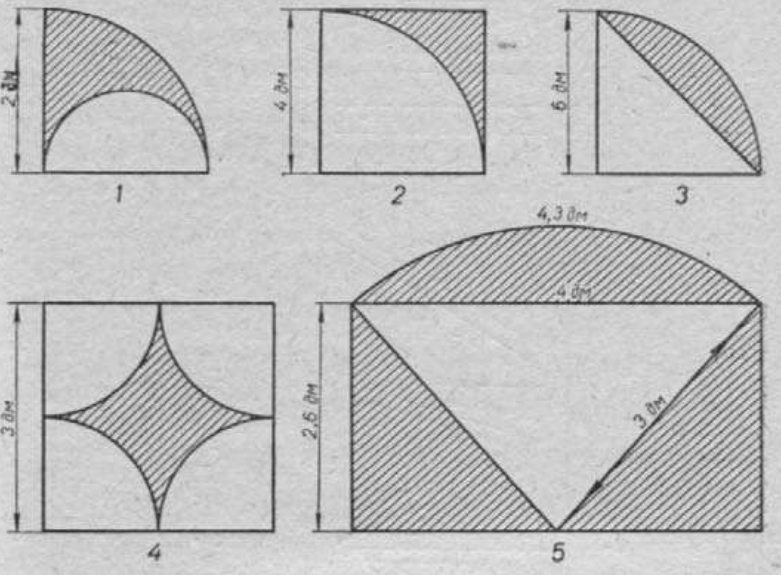


Рис. 11.

Самостійна робота за таблицею (рис. 11). Обчислити периметри і площі заштрихованих фігур. (У класі обчислюють тільки площі фігур, оскільки периметри визначали на попередніх уроках).

Зразок розв'язання дає сам учитель.

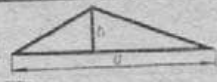
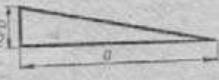
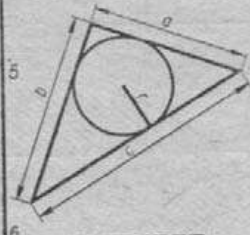
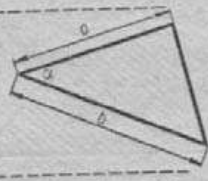
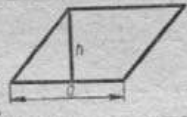
Розв'язання задачі за рис. 11,*1*:

а) $S = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{8}\pi R^2 = \frac{1}{8}\pi R^2;$

б) $S = \frac{1}{8}\pi R^2 = \frac{1}{8}\pi \cdot 2^2 = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}6 \ (дм^2).$

(Якщо $\pi \approx 3{,}14$).

Завдання додому. Доповнити таблицю площ геометричних фігур. (Таблицю вивішують у шкільному математичному кабінеті).

№	Назва фігур	Рисунок	Формула площі
I	Трикутники	1 	$S_\triangle =$
		2 	$S =$
		3 ----------	$S_\triangle =$
		4 ----------	$S_\triangle =$
		5 	$S_\triangle =$
		6 ----------	$S_\triangle = \frac{abc}{4R}$
		7 	$S_\triangle =$
II	Паралелограм	---------- 	$S =$
III	Ромб	1	$S =$
IV	Трапеція	2 ----------	$S =$
V	Прав. трикутник	----------	$S =$
VI	Круг	----------	$S =$
VII	Сектор	----------	$S =$
VIII	Сегмент	----------	$S =$

Наведемо приклади шести уроків, на яких вивчалася тема «Дійсні числа» (Богданівська школа Знам'янського району, заслужений учитель школи УРСР І. Г. Ткаченко).

УРОК № 1. ПІДГОТОВЧИЙ УРОК

Мета уроку. За допомогою певної системи вправ підготувати учнів до свідомого розуміння змісту поняття про ірраціональні числа як необхідної умови розширення поняття про число, зокрема наукового положення про те, що раціональні та ірраціональні числа утворюють множину дійсних чисел.

Подаємо один з варіантів такої системи вправ.

I. Добування квадратного кореня з чисел, що становлять точний квадрат

Задача. Обчислити діагональ прямокутника (BD), якщо його основа (AB) 36 *мм*, а висота (AD) 27 *мм*.

Алгебраїчне розв'язання.

Застосовуючи теорему Піфагора, дістаємо:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2; \quad BD^2 = 27^2 + 36^2; \quad BD^2 = 729 + 1296;$$

$$BD^2 = 2025; \quad BD = \sqrt{2025} = 45 \ (мм).$$

Відповідь. $BD = 45$ *мм*.

Геометричне розв'язання. Будуємо прямокутник за його основою і висотою, використовуючи лінійку і косинець. Вимірявши лінійкою або косинцем довжину діагоналі BD, маємо $BD = 45$ *мм*.

Висновок. Є така область практичних задач, під час розв'язування яких потрібно добувати квадратний корінь з чисел, що становлять точний квадрат.

II. Наближені значення квадратного кореня з раціональних чисел з точністю до 1; $\frac{1}{10^n}$ та запис відповіді у вигляді подвійної нерівності

Задача. Обчислити діагональ квадрата, якщо його сторона дорівнює 1 *см*.

Алгебраїчне розв'язання. Застосовуючи теорему Піфагора, матимемо:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2; \ AC^2 = 1^2 + 1^2; \ AC^2 = 2; \ AC = \sqrt{2} \ (см).$$

Відповідь. $AC = \sqrt{2}$ *см*.

Геометричне розв'язання. Будуємо квадрат за його стороною, використовуючи лінійку і косинець. Вимірявши

лінійкою або косинцем довжину діагоналі AC, маємо: $AC = 14$ *мм* або $AC = 15$ *мм* (наближено з точністю до 1 *мм*).

Висновок. Є така область практичних задач, під час розв'язання яких потрібно обчислювати наближені значення квадратного кореня з раціональних чисел з точністю до $\frac{1}{10^n}$.

Узагальнення. В процесі розв'язування практичних задач на обчислення площ прямолінійних фігур, поверхонь і об'ємів геометричних тіл або задач на обчислення часу руху тіла при рівнозмінному русі ми зустрічаємося з числами (цілими і дробовими), з яких квадратний корінь точно не добувається. З цих чисел квадратний корінь добувають наближено з наперед заданою точністю.

Наприклад:

А. *Добування квадратного кореня з точністю до одиниці.*

$\sqrt{2} \approx 1$ $\quad 2 > \sqrt{2} > 1$, бо $4 > 2 > 1$.

$\sqrt{2} \approx 2$

Б. *Добування квадратного кореня з точністю до* 0,1.

$\sqrt{2{,}00} \approx 1{,}4$ (з недостачею)

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ \times\ 24 & -100 \\ 4 & -96 \\ \hline & +4 \end{array}$$

$\sqrt{2{,}00} \approx 1{,}5$ (з надвишком)

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ \times\ 25 & -100 \\ 5 & -125 \\ \hline & -25 \end{array}$$

$1{,}5 > \sqrt{2} > 1{,}4$, бо $2{,}25 > 2 > 1{,}96$.

В. *Добування квадратного кореня з точністю до* 0,01.

$\sqrt{2{,}0000} \approx 1{,}41$ (з недостачею)

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ -\ 24 & -100 \\ 4 & -96 \\ \hline -\ 281 & -400 \\ 1 & -281 \\ \hline & +119 \end{array}$$

$\sqrt{2{,}0000} \approx 1{,}42$ (з надвишком)

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ -\ 24 & -100 \\ 4 & -96 \\ \hline -\ 282 & -400 \\ 2 & -564 \\ \hline & -164 \end{array}$$

$1{,}42 > \sqrt{2} > 1{,}41$, бо $2{,}0164 > 1{,}9881$.

Висновок. Добути з якого-небудь числа квадратний корінь з точністю до $\frac{1}{10^n}$ — це означає знайти два десяткові дроби, що відрізняються на $\frac{1}{10^n}$, між квадратами яких міститься дане число.

III. Подвійні послідовності чисел

Обчислюючи послідовно наближені квадратні корені з числа 2 з точністю до 0,1, до 0,01, до 0,001 і т. д. з недостачею і з надвишками, ми можемо скласти дві послідовності чисел:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots \qquad (1)$$
$$1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}451;\ 1{,}4143.\ \ldots \qquad (2)$$

Ці послідовності мають такі властивості:

1) В послідовності (1) кожне число більше попереднього числа; в послідовності (2) кожне число менше попереднього числа, тобто

$$1{,}4 < 1{,}41 < 1{,}414 < 1{,}4142 < \ldots$$
$$1{,}5 > 1{,}42 > 1{,}415 > 1{,}4143 > \ldots$$

2) Кожне число послідовності (1) менше відповідного йому (за номером) числа послідовності (2), тобто

$$1{,}4 < 1{,}5;$$
$$1{,}41 < 1{,}42 \text{ і т. д.}$$

3) Різниця між двома відповідними (за номерами) числами послідовностей (2) і (1) при зростанні цього номера стає і залишається скільки завгодно малою, тобто

$$1{,}5 - 1{,}4 > 1{,}42 - 1{,}41 > 1{,}415 - 1{,}414 \text{ і т. д. бо}$$
$$0{,}1 > 0{,}01 > 0{,}001 \text{ і т. д.}$$

IV. Перетворення звичайних дробів у періодичні десяткові дроби

А. $\frac{4}{9} = 0{,}4444\ldots = 0{,}(4)$; Б. $\frac{13}{99} = 0{,}131313\ldots = 0{,}(13)$;

В. $\frac{29}{45} = 2{,}6444\ldots = 2{,}6(4)$.

V. Довжина кола і площа круга

А. Довжина кола $C = 2\pi R$, або $C = \pi D$.

Б. Площа круга $K = \pi R^2$, або $K = \frac{\pi D^2}{4}$.

У цих формулах число π є відношення довжини кола до діаметра, причому $\pi = 3{,}14159265\ldots$

Число π є нескінченний і неперіодичний десятковий дріб.

Під час розв'язування практичних задач беруть наближені значення (з недостачею або з надвишком) нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Для числа π у випадках особливої точності задовольняються таким наближеним значенням (з надвишком): $\pi = 3{,}1416$.

З а в д а н н я д о д о м у (дають в процесі уроку):

I. Обчислити діагональ прямокутника, якщо його основа 28 *мм*, а висота 21 *мм* (подати два способи розв'язання — алгебраїчне і геометричне).

II. Обчислити діагональ квадрата, якщо його сторона дорівнює 5 *см* (подати два способи розв'язання — алгебраїчне і геометричне).

III. Добути $\sqrt{3}$ з точністю до 1; до 0,1; до 0,01; до 0,001 і до 0,0001; скласти подвійну послідовність чисел і записати відповідь за допомогою подвійної нерівності.

IV. Прочитати дроби: а) 0,25454; б) 2,555; в) 1,7320.

V. $\pi = 3\frac{1}{7}$ (за Архімедом). Який це дріб?

VI. Побудувати довільних розмірів $\triangle ABC$, якщо $A = 135°$, $B = 20°$, $C = 25°$, виміряти його сторони, порівняти їх за числовою мірою, записати встановлену залежність за допомогою нерівності.

Методичні вказівки

1. Зміст вправ і рисунки до задач записують на переносних дошках, які використовуються в певній послідовності в процесі уроку. Методичні прийоми використання переносних дощок можуть бути різними. Наприклад, учитель вивішує переносну дошку тільки з текстом задачі. Учні, після вивчення змісту, розв'язують задачу в зошитах.

В іншому випадку вчитель пропонує ознайомитися із змістом всього навчального матеріалу, який записано на переносній дошці, а потім пояснити його та самостійно скласти і розв'язати аналогічні вправи, наприклад, усвідомивши добування $\sqrt{2}$ з точністю до $\frac{1}{10^n}$, учні самостійно добувають $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ і т. д. до $\frac{1}{10^n}$.

2. Властивості подвійних послідовностей чисел учні формулюють самостійно. Це досягається за допомогою таких завдань:

А. Порівняйте в послідовностях (1) і (2) попередні і наступні числа — 1,4 і 1,41, 1,41 і 1,414; 1,5 і 1,42, 1,42 і 1,415 і т. д. і скажіть, яку закономірність ви помічаєте?

Б. Порівняйте за величиною числа послідовності (1) і (2), які розміщені на місцях одного й того самого порядкового номера, наприклад: 1,4 і 1,5; 1,41 і 1,42 і т. д.; який висновок ви можете з цього зробити?

В. Дослідіть різницю між двома числами, які розміщені на місцях одного й того самого порядкового номера в послідовностях (1) і (2), та скажіть, як змінюється ця різниця при зростанні номера послідовності (1) і (2).

3. Під час розв'язування вправ на періодичні дроби, вивчення змісту формул для довжини кола і площі круга, дій над відрізками учитель і учні працюють спільно, колективно, пояснюючи і обгрунтовуючи побудову рисунків і висновки.

4. У процесі уроку кілька разів користуються теоремою Піфагора. Тому доцільно сформулювати словами залежність, виражену в формулах:

$$a^2 + b^2 = c^2; \qquad a^2 = c^2 - b^2;$$

$$c^2 = a^2 + b^2; \qquad b^2 = c^2 - a^2,$$

а також показати цю залежність геометрично.

5. На початку уроку потрібно з'ясувати учням мету уроку, попередити, що вдома вони повинні виконати самостійну роботу. Зміст цієї роботи записують у процесі уроку. Урок складається з шести частин, пов'язаних між собою. Після кожної частини учні записують у зошити самостійних робіт текст вправи, яку виконують в класі, а при потребі остаточно доробляють вдома.

Такий методичний прийом дає змогу кожному учневі підвищувати свою продуктивність праці в процесі уроку.

УРОК № 2 (45 *хв*)

Тема уроку. Поняття про ірраціональне число та його зображення нескінченним десятковим неперіодичним дробом.

Мета уроку. Сформувати в учнів нове математичне поняття про ірраціональне число.

Хід уроку

Учитель. Числа додатні і від'ємні, цілі, дробові та нуль називаються раціональними. Вони виникли в про-

цесі трудової діяльності людини під час розв'язування певних практичних задач. Ми навчилися також виконувати дії над раціональними числами. Але в процесі трудової діяльності людини під час розв'язування певного типу задач і вправ з'явилися числа, які дістали назву ірраціональних.

Які ж це числа?

Розглянемо розв'язання таких задач:

З а д а ч а 1. (Переносна дошка № 1). Дальність горизонту на морі визначають за формулою $d = 3{,}6\sqrt{h}$, де d — дальність горизонту (в кілометрах), а h — висота ока спостерігача над рівнем моря (в метрах). Обчислити d, якщо $h = 15$ *м*.

Р о з в ' я з а н н я

$d = 3{,}6\sqrt{15}$

$\sqrt{15{,}00} \approx 3{,}8$ (з недостачею) $\sqrt{15{,}00} \approx 3{,}9$ (з надвишком).

$$\begin{array}{r|l} & -9 \\ \times\ 68 & -600 \\ 8 & -544 \\ \hline & +56 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & -9 \\ \times\ 69 & -600 \\ 9 & -621 \\ \hline & -21 \end{array}$$

$$d_1 \approx 3{,}6 \cdot 3{,}8 \approx 13{,}68 \ (км), \quad d_2 > d > d_1$$

$$d_2 \approx 3{,}6 \cdot 3{,}9 \approx 14{,}04 \ (км), \quad 14{,}04 > 14 > 13{,}68.$$

З а д а ч а 2. (Переносна дошка № 2). Обчислити з точністю до 1 *сек* час падіння тіла з висоти 30 *м*, користуючись формулою $s = \frac{gt^2}{2}$, де s — висота (в метрах), $g = 9{,}8 \ \frac{м}{сек^2}$ — прискорення сили земного тяжіння, t — час падіння (в *сек*).

Р о з в ' я з а н н я

$$s = \frac{gt^2}{2}, \text{ звідси } t^2 = \frac{2s}{g},$$

або $t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30 \ м}{9{,}8 \ м/сек^2}} = \sqrt{\frac{300}{49} \ сек^2} = \frac{10}{7}\sqrt{3} \ сек;$

$t_1 \approx \frac{10}{7} \cdot 1{,}7 \approx \frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}$ (*сек*); $t_2 \approx \frac{10}{7} \cdot 1{,}8 \approx \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$ (*сек*);

$$t_2 > t > t_1, \quad 2\frac{4}{7} > t > 2\frac{3}{7}.$$

З а д а ч а 3. (Переносна дошка № 3). Обчислити довжину діагоналі OA квадрата, сторона якого дорівнює одній лінійній одиниці (1 *мм*, 1 *см*, 1 *дм*, 1 *м* і т. д.).

Застосовуючи теорему Піфагора, дістаємо: $OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;

$OA = 1{,}4$ (з недостачею), $OA = 1{,}5$ (з надвишком).

У ч и т е л ь. Який висновок можна зробити на основі розв'язання цих задач?

У ч е н ь. Під час розв'язання цих задач нам довелося добувати $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ і $\sqrt{15}$. Ми переконалися, що з цих чисел квадратний корінь точно не добувається, а добувається тільки наближено (з недостачею або з надвишком).

При добуванні $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ і $\sqrt{15}$ ми мали нескінченний неперіодичний десятковий дріб.

У ч и т е л ь. Дуже важливим є той факт, що взагалі не можна знайти такого дробового числа, яке було б точним квадратним коренем з 2 (при піднесенні до квадрата дорівнювало б 2). Вперше це твердження довів понад дві тисячі років тому грецький математик Евклід. Спробуємо і ми скористатися методом Евкліда і довести це положення.

Т е о р е м а. Не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2.

Д о в е д е н н я (від супротивного). Очевидно, що серед цілих чисел немає такого числа. Припустимо, що існує такий нескоротний дріб $\frac{p}{q}$, квадрат якого точно дорівнює 2, тобто $\frac{p^2}{q^2} = 2$, звідки $p^2 = 2q^2$.

Яке число $2q^2$? Парне чи непарне?

У ч е н ь. Число $2q^2$ є парне, бо в нього входить множник 2.

У ч и т е л ь. А число p^2 парне чи непарне?

У ч е н ь, Число p^2 теж парне, бо має місце рівність $p^2 = 2q^2$.

У ч и т е л ь. Якщо p^2 парне число, то яким є число p?

У ч е н ь. Число p теж парне, бо квадрат парного числа дає число парне.

У ч и т е л ь. А яка формула парного числа?

У ч е н ь. Формула парного числа така: $2m$, $2k$, $2n$, $2p$ і т. д.

У ч и т е л ь. Отже, число p можна подати у вигляді $p = 2m$. Тепер, підставивши значення $p = 2m$ у рівність $p^2 = 2q^2$, дістаємо: $(2m)^2 = 2q^2$, $4m^2 = 2q^2$, або $2m^2 = q^2$,

число $2m^2$ — парне, отже, q^2, а значить, і q — парні числа.

Подамо q у вигляді $q = 2n$ і підставимо значення $q = 2n$ і $p = 2m$ у чисельник і знаменник дробу $\frac{p}{q}$. Матимемо $\frac{p}{q} = \frac{2m}{2n}$. Ми дійшли висновку, що дріб скоротний, а це суперечить умові.

Отже, наше припущення, що існує нескоротний дріб $\frac{p}{q}$, квадрат якого точно дорівнює 2, привело до логічного протиріччя. Тому ми його відкидаємо і приймаємо єдине твердження, що серед раціональних чисел немає квадратного кореня з 2.

Що ж слід розуміти під $\sqrt{2}$? Число це нової природи, яке зображається нескінченним неперіодичним десятковим дробом.

Числа виду $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, які зображаються нескінченним неперіодичним десятковим дробом, дістали назву ірраціональних (*ratio* — від латинського: відношення).

Означення. Ірраціональним називається число, яке виражається нескінченним неперіодичним десятковим дробом.

Під час розв'язування задач ірраціональне число вважається відомим, коли відомий спосіб, за допомогою якого можна знайти будь-яке число його десяткових знаків.

Завдання додому

Варіант 1 (на оцінку «3»).

I. З поданих чисел виписати окремо раціональні та ірраціональні числа:

1) 6,243; 2) 1,4142142; 3) 0,23333; 4) 0,135171717; 5) 2,714285714285.

Зб. П. О. Ларічева, ч. II, № 146(5).

II. Порівняти за величиною подані числа та замінити букву «і» знаком $>$ або $<$:

1) 15,4 і 15,368; 2) 7,8934597 і 7,89346000; 3) 0,5 і —1,555; 4) 3,1415926535 і $\sqrt{10}$; 5) $\sqrt{29}$ і $5\frac{5}{13}$.

Зб. П. О. Ларічева, ч. II, № 147 (вибірково).

III. Ірраціональне число $\sqrt{0,5}$ записати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу, обчисливши п'ять його перших десяткових знаків після коми.

Зб. П. О. Ларічева, ч. II, № 146 (3).

Варіант 2 (на оцінку «4», «5»).

Зб. П. О. Ларічева, ч. II, № 145 (1—4).

I. На числовій осі взято відрізок AB, що дорівнює 3 одиницям довжини, і на цьому відрізку побудовано квадрат $ABCD$. Всередині квадрата побудовано квадрат $KLMN$.

1) Довести, що площа квадрата $KLMN$ дорівнює 5.

2) Відкласти на числовій прямій AB від точки A відрізок, що дорівнює KL.

3) Довести, що довжину відрізка KL при даній одиниці вимірювання не можна виразити раціональним числом.

4) Обчислити наближені значення довжини відрізка KL з точністю до 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 з недостачею і з надвишком і записати у вигляді подвійної нерівності.

II. Скласти план доведення теореми про те, що серед раціональних чисел немає $\sqrt{2}$

Методичні вказівки

1. Готуючись до цього уроку, учитель повинен пам'ятати, що це урок на вивчення і закріплення нового матеріалу, що учні підготовлені до сприймання нового матеріалу під час попереднього підготовчого уроку.

2. Урок подає учитель у формі евристичної бесіди. Використання переносних дощок дає змогу учителю економити час і не відступати від мети уроку — сформувати в учнів нове математичне поняття про ірраціональне число та зображення його нескінченним неперіодичним десятковим дробом і підготувати учнів до розуміння поняття дійсних чисел.

3. На початку уроку, після того як один з асистентів учителя здав самостійні роботи учнів, які вони виконали вдома, учитель оголошує тему уроку і розпочинає виклад навчального матеріалу. Даючи завдання додому, учитель підкреслює, що його треба виконати в зошитах для домашніх контрольних робіт, при цьому дозволяється кожному учневі самостійно скласти і розв'язати аналогічний текст контрольної роботи. При всіх інших однакових умовах у цьому випадку оцінку за контрольну домашню роботу підвищують на один бал.

Така рекомендація заохочує учнів до творчої роботи, змушує їх глибше аналізувати свій навчальний і виробничий досвід, допомагає осмислити набуті теоретичні знання і розширити сферу їх практичного застосування.

4. Зміст таблиць, розв'язання задач і доведення теореми можна рекомендувати учням записати в робочий зошит. Означення і висновки вивчити на уроці, а окремим учням (при потребі) опрацювати за підручником.

5. Бажано, щоб при записах на переносних дошках використовувалася кольорова крейда. Це допомагає сконцентрувати увагу учнів на головному змісті таблиці.

УРОК № 3

Тема уроку. Зображення ірраціональних чисел на числовій осі. Порівняння ірраціональних чисел. Дійсні числа (45 *хв*).

Мета уроку. Розкрити і узагальнити поняття про дійсні числа.

Хід уроку

I. Запитання і вправи

1. Чому можна вважати, що нескінченний дріб, який ми дістаємо при добуванні квадратного кореня з числа 2, є числом нової природи. Який це дріб?

2. Сформулювати та довести теорему, що серед раціональних чисел немає квадратного кореня з числа 2.

3. Обчислити час падіння тіла з висоти 50 *м* (усно).

4. Як називається число $\sqrt{5}$. Назвіть наближені значення з недостачею і з надвишком, узяті з точністю до 0,1.

5. а) Які числа називаються ірраціональними?

б) Як називається число, що зображається десятковим нескінченним неперіодичним дробом?

6. Обчислити відношення діагоналі квадрата до його сторони. Яке ми дістали число?

Що являє собою число, яке виражає відношення двох несумірних відрізків?

7. Навести приклади задач, розв'язання яких приводить до появи ірраціональних чисел.

8. Як зображується раціональне число на числовій осі? Знайти на числовій осі: $+1$, $+5$, -3, -4 і т. д.

II. Вивчення і закріплення нового матеріалу

Учитель. Ми вже знаємо, що раціональне число — ціле чи дробове, додатне чи від'ємне — може бути зображене точкою на числовій осі.

Чи можна ірраціональне число теж зобразити на числовій осі?

Якщо можна, то що ж являє собою ірраціональне число на числовій осі?

Щоб відповісти на ці запитання, розгляньте уважно таку побудову (вивішується переносна дошка № 1).

Що ви бачите на рисунку?

Учень. На рисунку побудовано три квадрати: перший з стороною 1 *см*, другий з стороною 2 *см*, а третій з стороною 3 *см*. Довжини їх діагоналей за допомогою циркуля перенесені на числову вісь. Таким чином, ми одержали на числовій осі три відрізки: OA_1, OA_2, OA_3.

Учитель. Чому дорівнюють довжини цих відрізків?

Учень. $OA_1 = \sqrt{2}$; $OA_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $OA_3 = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Учитель. Які це числа?

Учень. Числа $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ — ірраціональні.

Учитель. Який висновок можна тепер зробити?

Учень. Точки A_1, A_2, A_3 відповідають ірраціональним числам. Отже, ірраціональне число також може бути зображене точкою на числовій осі.

Учитель. Ми переконалися, що на числовій осі лежать точки, які відповідають раціональним та ірраціональним числам.

А тепер розгляньте таку таблицю (вивішується переносна дошка № 2).

Учитель. Як змінюються проміжки, в яких міститься ірраціональне число, при послідовному відкладанні на числовій осі наближених значень ірраціонального числа з недостачею і з надвишком?

Учень. При послідовному відкладанні на числовій осі наближених значень ірраціонального числа з недостачею і з надвишком проміжки, в яких міститься дане ірраціональне число, поступово звужуються, прямуючи до нуля.

Учитель. Що ж являє собою точка, спільна для всіх цих проміжків?

Учень. Точка, спільна для всіх цих проміжків, є геометричним зображенням ірраціонального числа.

Учитель. Отже, кожній точці числової осі відповідає певне число, раціональне або ірраціональне. Ірраціональні числа, як і числа раціональні, можна порівнювати за величиною і виконувати над ними дії.

Ірраціональні числа бувають рівні і нерівні. Ірраціональні числа α і β називаються рівними, якщо у них збігаються як цілі частини, так і десяткові знаки, що знаходяться праворуч від коми (наприклад, якщо $\alpha = 1{,}732$ і $\beta = 1{,}732$, то $\alpha = \beta$. Прикладом нерівних ірраціональних чисел може бути розв'язок такої задачі (вивішується переносна дошка № 3).

Задача. У прямокутнику $ABCD$ $AB = 5$ *см*, а $AD = 2$ *см*, а в прямокутнику $AMNP$ $AM = 7$ *см*, $AP = 3$ *см*. Обчислити і порівняти довжини діагоналей AC і AN цих прямокутників.

На підставі теореми Піфагора маємо:

А. $AC^2 = AB^2 + AD^2$,

$AC = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$, або

$AC = \sqrt{29}$

Б. $AN^2 = AP^2 + AM^2$,

$AN = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$, або

$AN = \sqrt{58}$

$AN > AC$, отже, $\sqrt{58} > \sqrt{29}$

(бо $7{,}6 \ldots > 5{,}3 \ldots$)

Учитель. Порівнюючи додатні ірраціональні числа за величиною, зробіть висновок: при якій умові одне ірраціональне число більше від другого або навпаки?

Учень. З двох додатних ірраціональних чисел більше те, яке при розкладанні в десятковий дріб містить у собі більше число цілих ($\sqrt{58} > \sqrt{29}$, бо $7{,}6 > 5{,}3$), або — при рівності цілих — більше число десятих ($\sqrt{3} > \sqrt{2}$, бо $1{,}7 \ldots > 1{,}4 \ldots$), або — при рівності цілих і десятих — більше число сотих ($\sqrt{3} > \sqrt{2}$, бо $1{,}73 \ldots > 1{,}41 \ldots$) і т. д.

Учитель. Як розуміти число ($-\sqrt{2}$)?

Учень. Число ($-\sqrt{2}$) є від'ємне ірраціональне число. Його можна подати і графічно на числовій осі. $OA_1 = \sqrt{2}$. $OA_2 = -\sqrt{2}$. Точки A_1 та A_2 будуть протилежними.

Точки, які відповідають додатним ірраціональним числам, розміщені праворуч від нуля, а точки, які відповідають від'ємним ірраціональним числам, розміщені ліворуч від нуля.

Учитель. Отже, ірраціональні числа, як і числа раціональні, можуть бути додатними ($\alpha > 0$) і від'ємними ($\alpha < 0$) відповідно до змісту вимірюваної величини.

Розв'яжемо таку вправу: $a = 3$ *см*. $b = 6$ *см*.

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \text{або} \quad \frac{b}{a} = 2;$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}, \text{ або } \frac{OB}{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Учитель. Подумайте і скажіть, що являє собою відношення двох сумірних і несумірних відрізків.

Учень. Відношення двох сумірних відрізків є число раціональне, а відношення двох несумірних відрізків є число ірраціональне.

Учитель. Тепер наші поняття про число значно розширені. Ми переконалися, що поряд з числами раціональними є ще й числа ірраціональні. Раціональні та ірраціональні числа називаються дійсними числами або, інакше, утворюють множину дійсних чисел.

Це видно з такої таблиці (вивішується переносна дошка № 4).

На числовій осі більше з двох дійсних чисел зображається точкою, яка лежить правіше.

III. Завдання додому

Збірник задач з алгебри П. О. Ларічева, ч. II, № 374 (2, 4, 5, 6) і № 375 (4).

Дати обгрунтовані відповіді на такі запитання і навести відповідні приклади:

1. Чи справедливі такі твердження:

а) кожному раціональному числу відповідає на числовій осі одна і тільки одна точка;

б) кожній точці числової осі відповідає певне раціональне число?

2. Навести приклади ірраціональних чисел, походження яких не пов'язане з радикалами.

3. Які числа слід додати до множини раціональних чисел, щоб кожній точці числової осі відповідало певне число?

4. Як розуміти твердження: «Між множиною всіх дійсних чисел і множиною всіх точок числової осі можна встановити взаємно однозначну відповідність»?

5. Якщо a і b — будь-які раціональні числа, то чи завжди розв'язується у множині дійсних чисел рівняння $ax^2 = b$?

Примітка. При правильній і обгрунтованій відповіді на будь-які три запитання ставиться оцінка «3», на чотири запитання — оцінка «4», а на п'ять запитань — оцінка «5». (Можна будь-яке запитання, але не більше трьох, замінити на своє запитання і скласти відповідь. Заміна запитань на оцінку впливати не буде).

Методичні вказівки

1. Готуючись до даного уроку, вчитель повинен пам'ятати, що цей урок є продовженням попереднього і його логічним завершенням у тому розумінні, що на цьому уроці найповніше розкривається зміст поняття про ірраціональне число за допомогою його геометричного зображення. Учитель особливо має підкреслити його алгебраїчний вигляд і геометричне зображення (наприклад, $\sqrt{2}$ є не що інше, як довжина відрізка, рівного діагоналі квадрата, сторона якого дорівнює одній лінійній одиниці). Тільки після цього учитель переходить до узагальнення поняття про те, що раціональні та ірраціональні числа утворюють множину дійсних чисел.

2. Методика подавання нового матеріалу — це евристична бесіда. З метою раціоналізації навчального процесу та виховання зосередженості учнів на головному використовують, як і на попередньому уроці, переносні дошки.

3. На початку уроку учитель роздає учням домашні самостійні роботи, над якими вони працювали після підготовчого уроку; при цьому він коментує окремі роботи, вдалі відповіді, обгрунтовані висновки та раціональні розв'язки, а потім від одного з своїх асистентів приймає домашні контрольні роботи, які виконували вже після другого уроку. Після цього вчитель розпочинає фронтальне опитування класу, проводячи його в швидкому темпі й заслуховуючи по 2—3 відповіді на кожне запитання. Мета фронтального опитування полягає в тому, щоб перевірити точність формулювання означень, правил і висновків та створити оптимальні умови для сприймання нового матеріалу.

4. Зміст таблиць і розв'язки задач учні записують у робочі зошити. Означення і висновки вивчають на уроці

(окремі учні при потребі опрацьовують вдома за підручником).

5. Під час виконання домашнього завдання можна рекомендувати учням робити заміну окремих запитань на свої власні запитання (заміняти можна не більше трьох запитань). Оскільки це не впливає на оцінку, то цілком зрозуміло, що учень буде вводити такі запитання, відповіді на які він добре знає, знімаючи ті запитання, яких він або не розуміє, або не впевнений у правильності своєї відповіді.

Така форма домашнього завдання ставить кожного учня в становище, коли він самокритично оцінює свої знання. Крім цього, учитель одержує додаткову інформацію про обсяг і глибину засвоєння учнем навчального матеріалу.

Робота над таким домашнім завданням змушує учня використовувати підручник, а також спеціальну літературу, рекомендовану учителем.

УРОК № 4

Тема уроку. Поняття про дії над дійсними числами.

Хід уроку

1. Запитання і вправи (самостійна робота на 15 *хв*)

Вивішується переносна дошка № 1 з такими запитаннями:

1. Відрізок a несумірний з одиницею вимірювання; чи сумірний з нею відрізок $3a$; $\frac{2a}{5}$; $(a-2)$?

Якими числами виражається довжина цих відрізків?

2. Якщо на числовій осі відкласти від нульової точки відрізок, що дорівнює діагоналі одиничного квадрата, то яке число зображатиме точка, що буде кінцем цього відрізка? Його серединою? Його п'ятою частиною? (Накреслити рисунок).

3. $OA = \sqrt{20}$; $OA = OA_1 = \sqrt{20}$; $OA_2 = \frac{1}{2}OA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{20}$; $OA_3 = \frac{1}{4}OA = \frac{1}{4}\sqrt{20}$, де OA — діагональ квадрата, а OA_1 відповідний їй відрізок на числовій осі.

4. Сформулювати умову рівності двох ірраціональних чисел.

5. Перевірити алгебраїчно та геометрично, що $\sqrt{10} > \sqrt{5}$.

II. Вивчення нового матеріалу

Учитель. Ми встановили, що сукупність дійсних чисел ширша, ніж сукупність раціональних чисел, бо до раціональних чисел приєдналися ще нові, ірраціональні числа. Проте основні арифметичні дії встановлені поки що тільки для раціональних чисел.

Чи можна поширити ці дії і на числа ірраціональні, тобто в загальному випадку на дійсні числа?

Щоб відповісти на це запитання, ми для нових, тобто дійсних, чисел подамо означення дій так, щоб не порушувались встановлені раніше правила та закони, пам'ятаючи при цьому, що означаємо лише прямі дії.

Для цього розглянемо дії додавання та множення дійсних чисел, обмежившись додатними дійсними числами.

1. **Додавання**. Розглянемо додавання двох раціональних дробів, поданих у вигляді нескінченних періодичних дробів (вивішують переносну дошку № 2), де записано:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots; \quad \frac{r}{s} = \frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$$

Візьмемо їх послідовні десяткові наближення з недостачею і з надвишком:

$$0{,}3 < \frac{1}{3} < 0{,}4; \quad 0{,}8 < \frac{5}{6} < 0{,}9;$$

$$0{,}33 < \frac{1}{3} < 0{,}34; \quad 0{,}83 < \frac{5}{6} < 0{,}84;$$

$$0{,}333 < \frac{1}{3} < 0{,}334; \quad 0{,}833 < \frac{5}{6} < 0{,}834 \text{ і т. д.}$$

Додаючи їх почленно, маємо:

$$(0{,}3 + 0{,}8) < \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right) < (0{,}4 + 0{,}9);$$

$$(0{,}33 + 0{,}83) < \frac{1}{3} + \frac{5}{6} < (0{,}34 + 0{,}84) \text{ і т. д.}$$

Учитель. Чому дорівнює сума двох раціональних чисел?

Учень. Сума раціональних чисел, якщо вони дані у вигляді раціональних дробів, міститься між сумами відповідних десяткових наближень доданків, узятих з недостачею і надвишком.

Учитель. Тепер розглянемо додавання двох ірраціональних чисел, наприклад $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (А. П. Кисельов, § 10) (вивішують переносну дошку № 3), де записано: Дано: $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{3}$. Обчислити $(\alpha + \beta)$.

$$(1{,}4 + 1{,}7) < \alpha + \beta < (1{,}5 + 1{,}8);$$

$$(1{,}41 + 1{,}73) < \alpha + \beta < (1{,}42 + 1{,}74);$$

$$(1{,}414 + 1{,}732) < \alpha + \beta < (1{,}415 + 1{,}733) \text{ і т. д.}$$

Учитель. Чому дорівнює сума двох ірраціональних чисел?

Учень. Сума двох ірраціональних чисел виражається таким числом, яке міститься між сумами десяткових наближених доданків, узятих з недостачею і з надвишком.

Учитель. Розглянемо, нарешті, як знаходити суму раціонального та ірраціонального чисел. Наприклад, обчислимо суму $(3 + \sqrt{2})$. Цю вправу на дошці розв'язує один з учнів, а всі інші — в зошитах:

$$(3 + 1{,}4) < (3 + \sqrt{2}) < (3 + 1{,}5);$$

$$(3 + 1{,}41) < (3 + \sqrt{2}) < (3 + 1{,}42);$$

$$(3 + 1{,}414) < (3 + \sqrt{2}) < (3 + 1{,}415) \text{ і т. д.}$$

Учитель. Чому дорівнює сума раціонального і ірраціонального чисел?

Учень. Сума раціонального і ірраціонального чисел виражається таким числом, яке міститься між сумами відповідних десяткових наближень доданків, взятих з недостачею і надвишком.

Учитель. Як тепер можна сформулювати означення для суми двох дійсних чисел?

Учень. За суму двох дійсних чисел α і β беруть таке третє число γ, яке більше від суми наближених значень α і β, взятих з недостачею, і менше від суми їх наближених значень, взятих з надвишком (при однаковому ступені точності).

Учитель. Приймається без доведення, що число γ існує для будь-яких дійсних чисел α і β і до того ж єдине.

2. **Множення.** Учитель. Розгляньте уважно вправи в тій послідовності, в якій вони виконані, і сформулюйте означення для добутку двох дійсних чисел.

Вивішують переносну дошку № 4, де записано:

1. Обчислити добуток двох раціональних чисел

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{11}{90} \left(\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots \text{ і } \frac{11}{90} = 0{,}1222\ldots\right)$$

з точністю до 0,1; 0,01.

$$(0{,}1 \cdot 0{,}1) < \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{90}\right) < (0{,}2 \cdot 0{,}2);$$

$$(0{,}11 \cdot 0{,}12) < \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{90}\right) < (0{,}12 \cdot 0{,}13).$$

2. Обчислити добуток двох ірраціональних чисел $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ з точністю до 0,1; 0,01.

$$(1{,}4 \cdot 1{,}7) < (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) < (1{,}5 \cdot 1{,}8);$$

$$(1{,}41 \cdot 1{,}73) < (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) < (1{,}42 \cdot 1{,}74).$$

3. Обчислити добуток раціонального числа на ірраціональне: $2 \cdot 3{,}14159\ldots$

$$2 \cdot 3{,}14159\ldots = 6{,}28318\ldots$$

Після розгляду записів та відповідного пояснення вчителя кожний учень записує в свій зошит означення: «За добуток двох дійсних чисел α і β беруть таке третє число γ, яке більше від добутку наближених значень α і β, взятих з недостачею, і менше від добутку наближених значень цих самих чисел, взятих з надвишком (при однаковому ступені точності)».

Приймається без доведення, що таке число існує і до того ж єдине.

УРОК № 5

Тема уроку. Закріплення матеріалу попереднього уроку.

Запитання, вправи і задачі (виконують на дошці і в учнівських зошитах)

1. Дано: α і β — дійсні числа. Сформулювати правила дій, якщо:

а) $(\alpha - \beta) = x$, де $\alpha = x + \beta$;

б) $\frac{\alpha}{\beta} = y$, де $\alpha = \beta y$;

в) $\alpha \cdot 0 = 0$;

г) $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots \alpha = \alpha^n$,

де n — цілий і додатний показник.

2. Дано: α і β — дійсні числа.

Сформулювати правило знаків, якщо:

$$(-\alpha)\cdot(+\beta) = -\alpha\beta;\ (-\alpha)\cdot(-\beta) = +\alpha\beta.$$

3. Дано: α, β і γ — дійсні числа. Сформулювати закони дій, якщо:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha; \qquad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma;$$

$$\alpha\beta = \beta\alpha;$$

$$\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma = (\gamma\alpha)\beta = \alpha(\beta\gamma); \qquad (\alpha + \beta) : \gamma = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma}.$$

4. Порівняти довжини діагоналей квадратів, якщо сторона першого квадрата дорівнює 4 *см*, а другого 5 *см* (розв'язати алгебраїчно і геометрично).

5. Обчислити з точністю до 0,1, якщо

$$\alpha = \sqrt{3}.$$

6. Задача. Побудувати відрізок, який дорівнює сумі довжин діагоналей двох прямокутників, що мають такі розміри: 4 *см* і 7 *см* та 3 *см* і 2 *см* (один учень задачу розв'язує на дошці, а всі інші — в зошитах) (рис. 12).

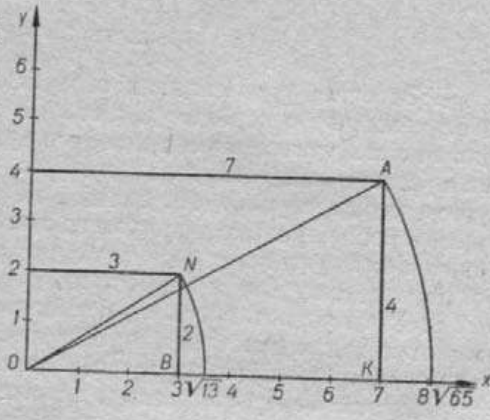


Рис. 12.

Алгебраїчне розв'язання.

Застосовуючи теорему Піфагора, дістаємо:

а) з прямокутного $\triangle OAK$: $OA = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$;

б) з прямокутного $\triangle ONB$: $ON = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$;

$$x = \sqrt{65} + \sqrt{13}.$$

$$(3{,}60 + 8{,}06) < (\sqrt{65} + \sqrt{13}) < (3{,}61 + 8{,}07);$$

$$\alpha < (\sqrt{65} + \sqrt{13}) < \beta.$$

Завдання додому

Підготуватися до семінарського заняття з теми «Дійсні числа», під час якого потрібно написати математичний твір на тему «Ірраціональні числа».

Для цього треба виконати такі завдання:

1. Скласти і розв'язати 1—2 задачі, в процесі розв'язання яких з'являються ірраціональні числа.

2. Вивчити напам'ять означення ірраціонального числа та підібрати кілька прикладів ірраціональних чисел.

3. Накреслити геометричне зображення ірраціонального числа (2 приклади).

4. Скласти і розв'язати задачу на порівняння ірраціональних чисел за їх величиною.

5. Виконати вправу на додавання або множення ірраціональних чисел.

Методичні вказівки

1. Здвоєний урок має деякі свої особливості навчального і психологічного характеру, а саме: з одного боку, він дає можливість учителеві пояснити і закріпити новий матеріал та провести ряд тренувальних вправ узагальнюючого характеру, а, з другого боку, якщо не уникати одноманітності в роботі, учні швидко стомлюються і навчальний ефект значно знижується.

Про це слід пам'ятати, готуючись до здвоєного уроку.

2. Урок розпочинають самостійною роботою учнів. Вони в зошитах для самостійних робіт пишуть відповіді на запитання, вміщені на переносній дошці, вказуючи тільки порядковий номер запитання, на яке вони відповідають.

У цей час учитель знайомиться із змістом домашнього завдання.

Після того як учні виконали і здали свої самостійні роботи, учитель аналізує якість виконання домашнього завдання, відзначає роботи окремих учнів, вдалі відповіді, доцільність в заміні окремих запитань. Якщо в перевірених роботах були помилки, то у їх виправленні беруть участь і учні класу. Учитель оцінює якість виконання домашнього завдання і виставляє оцінки.

3. З'ясовуючи поняття про дії над дійсними числами, учитель наголошує на тому, що сукупність дійсних чисел ширша, ніж сукупність раціональних чисел, бо до раціональних чисел приєдналися також нові, ірраціональні числа.

На уроці є можливість розглянути тільки такі випадки:

а) додавання (множення) раціональних чисел;

б) додавання (множення) ірраціональних чисел;

в) додавання (множення) раціональних і ірраціональних чисел.

4. Інші дії над дійсними числами — віднімання, ділення, множення на нуль, піднесення дійсного числа до степеня з цілим і додатним показником, а також закони дій над дійсними числами доцільно вивчати на уроці тренувальних вправ. Це дає можливість економити час, навчити учнів читати формулу або рівність словами, тобто встановити закономірність через розкриття її змісту, переконує учнів у тому, що й для дій над дійсними числами є відповідні закони, які відображають їх природу, зміст, бо і самі дійсні числа є кількісною стороною явищ і процесів природи.

Інші дії над дійсними числами — це захоплююча частина уроку, тому, враховуючи, що це здвоєний урок і учні вже трохи стомилися, її потрібно провести у формі колективних міркувань, коли відповіді на запитання або обгрунтування розв'язування вправи і задачі уточнюють і доповнюють самі учні.

5. Перед тим як дати учням домашнє завдання, учитель повідомляє, що наступний урок семінарських занять матиме деякі особливості, а саме:

а) учні вперше писатимуть математичний твір, причому тема твору така: «Ірраціональні числа»;

б) рекомендований план твору буде записано на переносній дошці (в майбутньому учні самі складатимуть план твору);

в) щоб написати твір за рекомендованим планом, потрібно добре підготуватися. Для цього учням треба розв'язати вдома ряд вправ і задач у тій послідовності, у якій її рекомендує вчитель, бо це не що інше, як план твору у формі запитань, вправ і задач.

Далі учитель зазначає, що під час роботи над твором можна користуватися тільки матеріалами домашнього завдання. Роботу слід виконувати в зошитах, призначених для математичних творів.

УРОК № 6 (45 *хв*)

Тема уроку. Узагальнення поняття про ірраціональні числа.

Мета уроку. Узагальнити вивчене про ірраціональні числа у вигляді математичного твору.

Учитель звертає увагу учнів на план твору, який завчасно записано на дошці, і зазначає, що, не переписуючи

плану, але відповідно до його змісту, учні відразу повинні розпочати виклад матеріалу, розв'язувати задачі і вправи та подавати відповідні обгрунтування розв'язування, побудови рисунків і висновків.

Подаємо план твору «Ірраціональні числа».

I. Вступ

1. Виникнення ірраціональних чисел:

а) з потреб розвитку науки;

б) з потреб практики.

2. Показати схему розвитку поняття про число (від натуральних до дійсних).

II. Поняття про ірраціональні числа

1. Розв'язування задач і вправ, які приводять до появи ірраціональних чисел (у тому числі і вправи на відношення двох несумірних відрізків).

2. Означення ірраціональних чисел. Приклади.

3. Геометричне зображення ірраціонального числа. Алгебраїчна і геометрична форми ірраціонального числа як свідчення двоїстості його природи, яка розкриває істотні ознаки нового числа — ірраціонального.

4. Рівність ірраціональних чисел. Порівняння їх за величиною (на прикладі задачі, розв'язаної алгебраїчно і геометрично).

III. Дії над ірраціональними числами

1. Розв'язати вправу на додавання або множення двох ірраціональних чисел, сформулювати означення (бажано, щоб приклади ірраціональних чисел не повторювали тих, які зустрічалися раніше).

2. Розв'язати вправу на піднесення ірраціонального числа до степеня з цілим і додатним показником.

§ 4. УРОКИ ЗАКРІПЛЕННЯ ЗНАНЬ, ФОРМУВАННЯ УМІНЬ І НАВИЧОК

Основним принципом вивчення основ наук у радянській школі є зв'язок теорії з практикою. У процесі практичної діяльності учні по-справжньому пізнають науку, її теоретичну і практичну цінність, стають активними учасниками творчого використання її досягнень. Практика є критерієм

пізнання й оцінки математичних знань. Справжнім джерелом і початком всякої математичної теорії є практика.

У пояснювальній записці до програми з математики зазначається: «У світлі завдань політехнічного навчання велике значення має виконання учнями вправ з метою вироблення умінь і навичок, необхідних для розв'язування практичних задач, а також виконання практичних робіт, які потребують застосування математичних знань учнів».

Поєднання теорії і практики у процесі вивчення основ математики в середній школі здійснюється головним чином через розв'язання задач як абстрактного, так і практичного, виробничого змісту.

Щоб учні глибоко і міцно засвоювали теоретичний матеріал на уроці, треба навчити їх володіти прийомами застосування теорії на практиці при розв'язуванні задач і вправ. Цей важливий процес навчання здійснюється на уроках засвоєння нових знань, формування умінь і навичок.

Отже, сама назва цього типу уроку розкриває його мету.

На уроках закріплення нових знань, формування умінь і навичок не подають нового матеріалу, проте при розв'язуванні доцільно підібраних задач учні можуть встановити і нові властивості фігури, і залежності. Наприклад, розв'язуючи задачі на доведення, учні встановлюють, що коли в піраміді бічні ребра рівні між собою, то її вершина проектується в центр описаного кола.

На цих уроках учні уточнюють і розширюють окремі математичні поняття, збагачують свої пізнання.

Питома вага уроків цього типу у загальній системі уроків дуже велика; вони займають приблизно $\frac{2}{3}$ навчального часу, що відводиться на вивчення математики. І це цілком закономірно. У процесі дослідження було встановлено, що учням значно важче навчитися застосовувати теореми і формули при розв'язуванні задач, ніж довести їх.

Наводимо таблицю, яка характеризує пізнавальні можливості учнів старших класів у засвоєнні теорії і вмінні застосувати її на практиці (див. стор. 88).

Перевіркою було виявлено певну закономірність: переважна більшість учнів успішно засвоює теоретичний матеріал попереднього уроку, але близько третини старшокласників не вміє користуватися ним при самостійному розв'язуванні задач і вправ. Слід зауважити, що класні практичні завдання були аналогічні домашнім. Це свідчить про те,

що більшість учнів формально виконувала також і домашні вправи, хоч теоретичний матеріал вони й засвоїли.

Таблиця

Показники засвоєння учнями теорії і набування практичних умінь

Експериментальні класи	Загальна кількість учнів	Кількість відведених уроків	Кількість учнів, які			
			засвоїли матеріал минулого уроку	не засвоїли матеріалу минулого уроку	виконали завдання середньої трудності на застосування вивченого матеріалу	не виконали завдання середньої трудності на застосування вивчуваного матеріалу
IX	521	17	396 / 76%	125 / 24%	136 / 26%	385 / 74%
X	870	33	704 / 81%	166 / 19%	297 / 34%	573 / 66%
XI	784	26	721 / 92%	63 / 8%	286 / 36%	498 / 64%

Результати експериментальних досліджень впевнили нас у тому, що формувати вміння і навички треба на спеціальних уроках, а не принагідно після пояснення нового матеріалу.

Виділення окремих уроків для практичних занять створило сприятливі умови для розвитку самостійності, ініціативи, творчості та інтересу до математики.

Нами було з'ясовано, як розподіляється навчальний час в експериментальних і контрольних класах (у контрольних класах уроки проводилися за старою системою). Ці результати ми наводимо в таблиці на стор. 89.

Як бачимо з таблиці, у контрольних класах витрачається менше третини часу, виділеного навчальним планом на розв'язування задач і вправ. Причому навіть ця явно недостатня для практики частина часу використовується на уроках тільки для колективного виконання практичних завдань.

На уроках в експериментальних класах на застосування знань учнів на практиці і на самостійне розв'язування задач і вправ відводиться приблизно у 3 рази більше часу, ніж на вивчення теорії.

Таблиця

Середні показники витрати навчального часу в експериментальних і контрольних класах при вивченні окремих тем (розділів) навчальної програми

Тема	Клас	Кількість класів	Витрачено часу (в *год*) на					Всього годин на вивчення теми
			вивчення теорії	розв'язування задач		навчання способом розв'язування задач	контролювання знань	
				колективно	самостійно			
Тригонометричні функції будь-якого аргументу	Експериментальний	8	9	—	16	8	7	40
Та сама	Контрольний	12	14	10	—	—	16	40
Многогранники	Експериментальний	8	4	—	13	3	3	23
Многогранники	Контрольний	8	7	7	—	—	9	23
Тіла обертання	Експериментальний	8	6	—	12	7	5	30
	Контрольний	8	8	9	—	—	13	30
Витрачено часу на всі теми (розділи) в годинах і процентах	Експериментальний	—	19 / 20,4%	—	41 / 44%	18 / 19,4%	15 / 16,2%	93
Те саме	Контрольний	—	29 / 31,2%	26 / 28%	—	—	38 / 40,8%	93
Відносна ефективність		—	0,65	0	—	—	0,4	—

Наступними експериментами було виявлено певну закономірність між часом, який використовували на вивчення теорії, і часом, потрібним для набуття учнями умінь і навичок застосовувати свої знання на практиці. Залежно від характеру теоретичного матеріалу й рівня знань учнів установлюється і найбільш раціональна відповідність між теорією і практикою.

Результатами досліджень і на основі досвіду вчителів установлено, що чим більше відношення (Θ) часу (T), відведеного на самостійну роботу, до часу (t), необхідного для вивчення теорії, тим вища результативність навчання, тим більший рівень математичних знань учнів. В. Оконь зазна-

чає, що «оволодіння знаннями буде тим успішніше і міцніше, чим більше самостійності виявлять учні» *.

Враховуючи час, передбачений навчальним планом на вивчення математики в середній школі, $\Theta = \frac{T}{t} \geqslant 3$, тобто це відношення може не тільки дорівнювати 3, а навіть бути більшим від 3. Оптимальної відповідності між теорією і практикою можна досягти як удосконаленням структури уроку пояснення нового матеріалу, так і введенням спеціальних уроків закріплення знань, формування умінь і навичок.

Хоч уроки закріплення знань, формування умінь і навичок за своєю організацією і за методами роботи дуже різноманітні, проте їх можна поділити на два основні види:

а) уроки, що безпосередньо ідуть за поясненням нового матеріалу (другий із здвоєних уроків);

б) уроки, що ідуть за будь-яким уроком за розкладом, згідно з навчальним планом.

Уроки першого виду призначені в основному для закріплення матеріалу попереднього уроку (задачі, таблиці та ілюстрації добирають саме з цією метою), тоді як на уроках другого виду закріплюють весь вивчений теоретичний матеріал, а не тільки матеріал попереднього уроку.

Якщо на уроках першого виду переважають колективні і напівсамостійні (з коментуванням) форми роботи, то на уроках другого виду переважають самостійні роботи індивідуального характеру.

Уроків другого виду значно більше, вони змістовніші і різноманітніші за методами роботи. На цих уроках у процесі самостійної роботи учнів учитель має можливість виявити знання кожного учня, подати йому індивідуальну допомогу, допомогти повніше використати свої здібності.

Експеримент, проведений у школах Кіровоградської області, показав, що при наявності спеціальних уроків для формування умінь і навичок учням неважко розв'язати вдвічі більше задач, ніж при звичайній організації уроків.

Наприклад, учитель В. Г. Коваленко (школа № 2 м. Кремгеса Кіровоградської області) під час вивчення теми «Правильні многокутники» при звичайній організації уроків розв'язував з учнями не більше $^2/_3$ задач із стабільного задачника. А при новій організації уроків учні тих самих класів не тільки встигають розв'язати всі задачі з

---

* В. Оконь, Процесс обучения, М., Учпедгиз, 1962, стор. 156 — 157.

теми із стабільного задачника, а й розв'язують такі задачі з інших джерел. Учителі випускних класів, які перейшли на нову організацію уроків, доповнюють стабільні збірники задач конкурсними збірниками задач: Н. Н. Антонов, М. Я. Вигодский и др., Сборник задач по математике; К. И. Шахно, Сборник задач по математике.

На уроках цього типу вчитель має всі можливості керувати розвитком математичних інтересів учнів і їх здібностей через організацію самостійної роботи індивідуального характеру (добір диференційованих завдань).

Спинимося докладніше на питанні про диференційовані завдання, які набули великого поширення на уроках тренувальних вправ, формування умінь і навичок.

Диференційовані завдання, їх види і місце в навчальному процесі

У практичній роботі вчитель часто орієнтується на так званого середнього учня. Якщо середній учень засвоює матеріал, то це означає, що такий матеріал посильний для всього класу.

Проте середні учні — категорія досить мінлива. Те саме можна сказати і про учнів, які відстають. Старшокласники — це завтрашні новатори виробництва, конструктори, вчені. Тому саме в школі треба привчати їх робити нехай маленькі, але самостійні відкриття, виховувати в них почуття радості в процесі переборення труднощів, пізнання нового.

Спеціальні дослідження з питань впливу успіху на процес діяльності підлітків підтверджують, що успіх спонукає до активної навчальної діяльності учнів, тоді як невдача, навпаки, викликає гальмівні дії. Непосильні вимоги до учнів не тільки знижують інтерес до навчання, а є також причиною неуспішності і другорічництва.

На однакових для всього класу завданнях не можна по-справжньому розвинути самостійність, творчість і здібності кожного учня, підвищити якісний рівень знань учнів з різною математичною підготовкою. Психологи стверджують, що тільки посильними завданнями з наступним збільшенням їх трудності можна збагатити знання учнів і добитися значних успіхів у їх навчанні.

Одним з основних принципів, покладених в основу нової організації уроків з математики, є диференціація завдань за

ступенем трудності на уроках тренувальних вправ і контрольно-залікових уроках.

Досвід роботи показує, що метод, при якому один з учнів розв'язує задачу біля дошки, а решта в зошитах, не є ефективним для розвитку активності, творчої ініціативи і самостійності всіх учнів.

У таких випадках до дошки найчастіше викликають кращих учнів, значно рідше — середніх і тільки в поодиноких випадках — відстаючих. При цьому активно працюють тільки сильні учні, а малопідготовлені механічно переписують незрозумілі для них готові формули.

Ще й досі орієнтація на середнього учня призводить до того, що задач підвищеної трудності в класі майже не розв'язують. Тому нерідко оцінка «5» не є об'єктивною, бо вона виставлена за розв'язування задачі середньої трудності. Наприклад, коли було введено диференційовані завдання в IX класі Кіровоградської школи № 6, окремі «відмінники» виявилися безсилими розв'язати задачі підвищеної трудності. Такі учні змушені були докласти багато зусиль, щоб стати, нарешті, справжніми відмінниками.

Чотирирічний колективний досвід підтвердив доцільність диференційованих завдань, які практикують на уроках тренувальних вправ. Диференційовані завдання передбачають індивідуальну роботу з усіма категоріями учнів, конкретну допомогу кожному учневі для максимального розвитку його розумових здібностей. З такою метою, ураховуючи підготовку учнів, добирають спеціальні завдання в трьох варіантах: для добре підготовлених учнів, для середніх і для малопідготовлених.

Правильне виконання першого варіанта оцінюють балом «5», другого — «4» і третього — «3».

При цьому кожен учень має право вибрати той варіант, який він вважає для себе найбільш посильним.

Слід зауважити, що хоча і виставляють оцінки на таких уроках, але оцінюють роботу учня тільки після того, як він навчився виконувати її самостійно. Про це знає кожний учень, тому в класі відсутні нервовість і перевантаження. Форми роботи на такому уроці мають справді навчальний характер, хоч елементи контролю є й тут. На таких уроках у будь-який момент учитель знає, як учень засвоїв теоретичний матеріал, як він застосовує його на практиці, які і де зустрічає труднощі. Організація диференційованого навчання на уроці забезпечує, таким чином, зворотний зв'язок.

Завдання різної трудності створюють реальні умови для якісного зростання знань усіх категорій учнів, оскільки такі завдання забезпечують посильною роботою кожного учня.

Відомо, що формуванню умінь і навичок перешкоджають як непосильна трудність завдань, так і надмірна їх легкість. Якщо вчитель не турбуватиметься про те, щоб учням, які легко справляються з роботою, давати індивідуальні складніші завдання, то ці учні не тільки не привчаться до праці, а, навпаки, звикнуть більшу частину часу, відведеного для навчальної практики, нічого не робити. У них вироблятимуться такі риси, як неповага до праці, до предмета, пасивність і ін. У таке саме становище потраплять і ті учні, яким пропонують непосильні завдання. Індивідуалізація завдань, при якій від кожного учня вимагають доступного для нього трудового зусилля, усуває ці недоліки в навчанні.

Триваріантність завдань, розрахованих на різну підготовку учнів, значною мірою розв'язує проблему доступності при розв'язуванні задач і вправ.

Пропонуючи класу триваріантне завдання за ступенем трудності, ми зовсім не маємо на меті штучного поділу учнів на здібних і нездібних. Навпаки, ми намагаємося розвинути здібності кожного учня і виховувати в нього впевненість у своїх силах.

М. В. Потоцький пише: «Можливо, що учневі, який втратив віру в себе, доцільно спочатку дати для розв'язання найпростіші задачі, які він напевне розв'яже, щоб дати можливість йому повірити в свої сили»*.

При диференційованому навчанні навіть ті учні, які вчилися незадовільно, впевнюються в своїх силах і починають через деякий час успішно вчитися.

Окремі методисти і викладачі доводили, що при диференційованих триваріантних завданнях багато учнів, особливо малопідготовлених, намагатиметься виконувати завдання тільки найлегшого варіанта, а тому завжди буде вчитися лише на трійки. Такі твердження виявилися безпідставними, бо, як показала практика, всі учні, збагачуючи свої знання, переходять від простішого до складнішого, від легшого до важчого.

---

* М. В. Потоцкий, О педагогических основах обучения математике, М., Учпедгиз, 1963, стор. 54.

Академік Є. О. Патон говорив: «Я вже не раз на своєму досвіді впевнювався в тому, що важкі і сміливі задачі куди цікавіше розв'язувати, ніж задачі прості й дрібні. І нехай це не буде парадоксом — легше розв'язувати! Коли людині доведеться не через горбок перебиратися, а взяти в науці штурмом круту неприступну вершину, вона збирає, мобілізує, а потім віддає все найкраще, що в ній є, вона стає сильнішою, розумнішою, талановитішою. А отже, і працювати їй стає легше»*. Це переконливе твердження безпосередньо стосується також процесу навчання.

У школах, де диференційовані завдання практикують уже кілька років, інтерес учнів до математики набагато зріс і успішність значно підвищилась.

На уроках з триваріантним типом завдань учитель веде зошит з таблицею, складеною за такою формою:

№ п.п	Прізвище учня	Вибраний ступінь трудності завдання			Розв'язував задачу			Помилки	Оцінка
		I	II	III	I	II	III		
1	Трофимець Валя	V	V	—	V, V	V, V	—	—	4
2	Калько Таня	—	V	V	—	V	V	—	5
3	Кузьміна Наташа	—	—	V	—	—	V, V	—	5

У цій таблиці вчитель відмічає вибраний кожним учнем варіант завдання, кількість розв'язаних задач або прикладів, допущені помилки, ставить підсумкову оцінку за виконану на уроці роботу. Задачі, розв'язані за допомогою вчителя або товариша, в таблицю не заносять і, отже, не оцінюють.

Тому, хто виявив самостійність, уміння раціонально застосовувати теорію на практиці, наприкінці уроку виставляють оцінку. Іноді таких учнів буває 5—6, а то й 10—15. Буває й так, що протягом уроку вчитель не виставить жодної оцінки.

Учителі не позбавляють учнів можливості ознайомитись з розв'язуваннями тих задач і прикладів, які на цьому уроці були для них непосильні. Для цього наприкінці уроку

* Е. О. Патон. Воспоминания. М., изд-во ЦК ВЛКСМ «Молодая гвардия», 1958.

відводять певний час на розв'язування або складання плану розв'язування задач середньої і підвищеної трудності. Найчастіше це виконують ті учні, які ці задачі розв'язали.

Диференційовані завдання трьох ступенів трудності є тільки одним з видів диференціації завдань.

У процесі експерименту ми розробили і перевірили такі види диференційованих класних практичних завдань для самостійних (навчальних) робіт учнів:

1) триваріантні завдання за ступенем трудності (полегшеного, середнього і підвищеного);

2) спільні для всього класу завдання (полегшеної або середньої трудності) з доповненням системою додаткових завдань з наростаючим ступенем трудності;

3) індивідуальні диференційовані завдання;

4) рівноцінні двоваріантні завдання (середньої або підвищеної трудності);

5) групові диференційовані завдання з урахуванням різної підготовки трьох категорій учнів;

6) рівноцінні двоваріантні завдання з доповненням до кожного варіанта системи додаткових завдань з наростаючим ступенем трудності;

7) спільні практичні завдання із зазначенням мінімальної і максимальної кількості задач або прикладів для обов'язкового виконання;

8) індивідуально-групові роботи над уже розв'язаними задачами або прикладами різного ступеня трудності;

9) індивідуально-групові завдання у вигляді запрограмованих карток.

Застосовуючи 1-й спосіб диференціації, учитель пропонує учням на вибір будь-яке з трьох завдань. Кожний вибирає посильне для нього завдання. Виконавши, наприклад, перше завдання, учень приступає до другого, а потім — до третього. Тим, хто виконав усі три варіанти завдань, пропонують додаткове, ще складніше завдання.

Систему диференційованих завдань добирають так, щоб виконання першого варіанта готувало учнів до успішного виконання другого варіанта, виконання другого — до виконання третього і далі — до додаткового завдання. Наприкінці уроку обов'язково виділяють час для коментованого розв'язування задач середньої і підвищеної трудності для тих учнів, які їх не розв'язували або не розв'язали. З кожним наступним уроком ступінь трудності кожного варіанта завдання на застосування раніше вивченого матеріалу зростає.

При такому способі диференціації завдань домашнє завдання записують на початку уроку за такою схемою: I → II → III * — додаткове завдання. Багато учнів починає виконувати домашнє завдання на уроці. Домашня самостійна робота є по суті продовженням класної самостійної роботи. При цьому зростає роль учителя в керівництві процесом виконання не тільки класних, а й домашніх завдань.

При 2-му способі диференційованих завдань учитель добирає спільну для всіх учнів систему вправ, кожна з яких складніша за попередню, причому виконання попередньої є основою для успішного виконання наступної.

Застосовуючи 3-й спосіб диференційованих завдань, добирають індивідуальні завдання відповідно до підготовки кожного учня і заносять їх у спеціальні учнівські картки. Цей спосіб передбачає максимум самостійності учнів.

Застосовуючи 4-й спосіб диференціації, учитель пропонує за рядами два рівноцінні варіанти завдань середньої і підвищеної трудності без додаткових завдань. При цьому передбачають допомогу вчителя і взаємодопомогу між самими учнями. Крім того, якщо учень першого ряду парт виконав запропоноване йому завдання, він приступає до виконання завдань для другого ряду.

Застосовуючи 5-й спосіб диференціації, учитель добирає три варіанти завдань для трьох груп учнів, які мають відповідно низьку, середню і високу підготовку. При цьому завдання дають не на вибір, а пропонують кожному учневі відповідно до його знань. Тут передбачають повну взаємодопомогу між учнями різних груп і, як і при будь-якому способі диференціації завдань, мають на меті впевнити кожного учня в своїх силах і здібностях.

Коли ж застосовують 6-й спосіб диференціації, то класу пропонують два рівноцінні за трудністю варіанти з доповненням до кожного з них системою додаткових завдань підвищеної трудності. Ці завдання практикують тоді, коли всі учні класу мають відповідні уміння і навички самостійного застосовування своїх знань і спроможні без сторонньої допомоги виконати спільне завдання, а більш підготовлені, крім спільного, ще й додаткове.

Застосовуючи 7-й спосіб, учитель ставить перед собою

---

* I — завдання полегшеної трудності, II — завдання середньої трудності, III — завдання підвищеної трудності.

мету максимально прискорити темпи розв'язування задач. Цей спосіб практикують найчастіше тоді, коли практичні завдання мало або майже не відрізняються одне від одного за ступенем трудності, як, наприклад, розв'язування прикладів на застосування правил логарифмування, розв'язування прямокутних і косокутних трикутників, виконання математичних дій на лічильній лінійці, розв'язування прикладів на дослідження квадратного тричлена і т. д. На таких уроках працездатність учнів визначають, зокрема, кількістю правильно розв'язаних задач або прикладів.

При 8-му способі диференціації учитель добирає з різних методичних посібників, збірників конкурсних задач для вступаючих у вузи, з кращих контрольних і екзаменаційних учнівських робіт за минулі роки уже розв'язані задачі різних ступенів трудності. На прикладах цих задач учні з різною математичною підготовкою вчаться розв'язувати різної трудності задачі. Самостійно працюючи над такими задачами, учні привчаються раціонально будувати план розв'язання задачі, логічно мислити, розвивають правильну математичну мову, привчаються правильно розміщувати записи, набувають уміння читати рисунки, виявляти в складному рисунку заздалегідь задані фігури, доповнювати його так, щоб у ньому виявилися фігури певного виду тощо. При цьому учням рекомендують також знайти до розглядуваного розв'язку задачі свій спосіб розв'язання. Це сприяє розвитку доказового, критичного мислення учнів.

При застосуванні 9-го способу учням пропонують заздалегідь заготовлені вчителем картки, у кожній з яких запрограмована система запитань і відповідей (правильних і неправильних) для розв'язання задачі певного ступеня трудності.

При всіх способах диференціації завдань переслідують одну мету — зацікавити учнів математикою, прищепити їм уміння і навички самостійно застосовувати свої знання при виконанні спочатку простих, а потім і складніших завдань, враховувати можливості учнів і створювати умови для повного виявлення здібностей, підвищити успішність кожного учня, усунути постійне недовантаження одних учнів і перевантаження інших, розвинути і зміцнити вольові зусилля кожного учня.

Практикують диференційовані завдання і за теоретичними питаннями програми. Вони полягають у тому, що найбільш підготовленим учням пропонують доведення деяких

теорем виконати не так, як у підручнику, а іншим шляхом: використати відповідну додаткову літературу, самостійно вивчити матеріал наступного уроку тощо.

Малопідготовленим учням пропонують теоретичні завдання на спеціальних консультаційних картках, на яких конкретно вказано раніше вивчений матеріал, повторення якого полегшить засвоєння нового матеріалу і його практичне застосування.

Класифікація диференційованих завдань за ступенем трудності

Класифікація завдань за ступенем трудності — проблема нелегка для вчителя, особливо молодого. Питання про визначення ступеня трудності математичних завдань розроблено поки що недостатньо. З точки зору психології краще розроблено питання про те, що в навчанні є легким і що складним. Праці з цього питання, які заслуговують на увагу, вміщено в «Известиях» Академії педагогічних наук РРФСР. Серед них можна назвати такі статті:

Менчинская Н. А., Интеллектуальная деятельность при решении задач, вып. 3, 1946;

Менчинская Н. А., К проблеме психологии усвоения знаний, вып. 61, 1954;

Зыкова В. И., Психология усвоения геометрических понятий учащимися VI классов, вып. 61, 1964;

Долбаев Л. П., Мыслительные процессы при составлении уравнений, вып. 80, 1957;

Ярощук В. Д., Психологический анализ процессов решения типовых арифметических задач, вып. 80, 1957 та ін.

Слід назвати також і окремі книги:

Менчинская Н. А., Психология обучения арифметике, Учпедгиз, 1955;

Зыкова В. И., Очерки психологии усвоения начальных геометрических знаний, М., Учпедгиз, 1955;

Пути повышения успеваемости по математике, под ред. Н. А. Менчинской и В. И. Зыковой, М., Изд-во АПН РСФСР, 1955.

Ці праці становлять значну цінність для методики навчання з математики, зокрема для розв'язування питань, пов'язаних з трудністю засвоєння нового матеріалу і розв'язанням задач.

Психологи вважають, що більш-менш правильно визначити ступінь трудності задачі можна тільки на підставі старанного вивчення процесу мислення учня в кожний конкретний момент його навчання.

М. В. Потоцький на запитання, що слід вважати легким і що важким у навчанні, відповідає: «...легким для засвоєння є те, що перебуває в руслі звичних уявлень учнів або безпосередньо розвиває ці уявлення, незалежно від того, з коротких чи довгих ланок умовиводів складаються наведені тут міркування. Важким для засвоєння є те, що не вкладається у ці звичні уявлення, що якоюсь мірою суперечить цим звичним уявленням або якоюсь мірою їх руйнує, знову-таки незалежно від довжини цих ланок суто логічних умовиводів, з яких складаються наші міркування»*.

На підтвердження цього М. В. Потоцький наводить приклади з педагогічної практики, вказуючи, наприклад, що арифметичне розв'язання задачі важче алгебраїчного, тому що в останньому, яким би воно не було довгим, учень використовує знайому ідею зведення задачі до рівняння і розв'язання його за готовими правилами, тоді як найкоротше арифметичне розв'язання пов'язане з раніше невідомою ідеєю. У цьому й полягає трудність задачі.

Відомий психолог Н. А. Менчинська зауважує, що учневі найлегше розв'язувати ті задачі, які відповідають його життєвому досвіду.

С. Л. Рубінштейн у книзі «О мышлении и путях его исследования» (М., Изд-во АН СССР, 1958), вказує, як саме формулювання задачі впливає на успішність її розв'язання, і наводить відповідні приклади.

Д. Пойа у своїй книзі «Как решать задачи» (вид. 2, М., Учпедгиз, 1961) наводить на думку, що всяку нову задачу найлегше розв'язати на основі попереднього досвіду. І це справді так, тому що розв'язання будь-якої нової складної задачі містить у собі деяку кількість уже відомих простих операцій, які дають разом з новими шуканий розв'язок. Без знання всіх елементів, з яких складається розв'язок задачі, учень задачу не розв'яже. Це треба враховувати при визначенні трудності завдання.

У наведених вище працях це питання в основному стосується тільки дослідження процесів навчання математики

---

* М. В. Потоцкий. О педагогических основах обучения математике, М., Учпедгиз, 1963, стор. 72.

учнів I—VI класів. Спостережень над учнями старших класів дуже мало.

Роль процесу навчання, вказує М. О. Данилов, полягає в тому, щоб, спираючись на рівень підготовки учнів, правильно визначити ступінь і характер труднощів у навчальному процесі, в тому числі і в доборі системи математичних завдань для самостійного виконання учнями*.

Наші спостереження показали, що вчитель, добре знаючи свій клас, може точно скласти і розподілити завдання за варіантами трьох ступенів трудності.

Характерно, що в різних класах ту саму задачу можна віднести до різних за ступенем трудності варіантів. Іноді задача сприймається як складна, якщо вона нова для учнів, і ця ж задача виявиться для учнів легкою, якщо аналогічна до неї вже розв'язувалася.

У кількох контрольних класах ми запропонували контрольну роботу з диференційованими завданнями різної трудності. Завдання складали разом з учителями, які застосовували дослідну систему навчальних занять протягом кількох років. Природно, що задачі вчителі підбирали, виходячи з підготовки учнів своїх експериментальних класів.

Із 127 учнів контрольних класів 87 виконували найлегший варіант контрольної роботи, 24 виконували завдання середньої трудності і тільки 16 вибрали найважчий варіант. Причому з цих 16 учнів ніхто не справився з роботою, з 24 виконали завдання тільки 8, а 87 учням позитивних оцінок було виставлено лише 38. І хоч учні контрольних класів були підготовлені порівняно добре і їх успішність не була нижчою порівняно з учнями експериментальних класів, все ж добір варіантів за трудністю не відповідав математичній підготовці учнів цих класів, не були враховані їх індивідуальні можливості.

Таким чином, без урахування індивідуальних можливостей учнів кожного класу зокрема не можна серйозно займатися питанням добору завдань за ступенями трудності.

На підставі наших досліджень, спостережень і досвіду вчителів можна зробити висновок, що серед математичних задач немає найлегшої, але немає й найважчої. Трудність задачі залежить від підготовки учня в момент її виконання

---

* Див. М. А. Данилов, Процесс обучения в советской школе, М., Учпедгиз, 1960.

умов роботи.

Умовним критерієм визначення ступеня трудності диференційованих завдань є:

1. Рівень математичних знань кожного учня.

2. Ступінь аналогії даної задачі з тими, які учні розв'язували в класі і вдома раніше.

3. Ступінь зв'язку нового матеріалу з раніше вивченим.

4. Ступінь трудності застосування нового матеріалу до розв'язання даної задачі (наприклад, розв'язуючи № 22 (3), 22 (2) із збірника задач Н. Рибкіна, ч. II, учні легко застосовують теорему про три перпендикуляри, тоді як, розв'язуючи задачу № 22 (1), учням важко знайти її застосування, а при розв'язанні задачі № 28 — ще важче).

5. Складність і кількість тотожних перетворень, складність і кількість старих і нових математичних операцій.

6. Співвідношення між кількістю і якістю нових і раніше вивчених математичних понять, застосовуваних при ров'язуванні даної задачі або вправи.

7. Місце і раціональність застосування нового матеріалу в розв'язанні даної задачі або вправи, а також ступінь трудності проміжних перетворень на шляху застосування нового матеріалу. Наприклад:

Розкласти на множники:

а) $x^2 - b^2 = (x - b)(x + b)$;

б) $a^2 - 2ab + b^2 - 9 = (a - b)^2 - 9 = (a - b + 3)(a - b - 3)$;

в) $ab + ac + b^2 + 2bc + c^2 = (ab + ac) + (b^2 + 2bc + c^2) = a(b + c) + (b + c)^2 = (b + c)(a + b + c)$;

г) $x^2 - 8x + 15 = x^2 - 8x + 15 + 1 - 1 = x^2 - 8x + 16 - 1 = (x - 4)^2 - 1 = (x - 4 - 1)(x - 4 + 1) = (x - 5)(x - 3)$;

д) $a^3 + 6a^2 + 11a + 6 = a(a^2 + 6a + 11) + 6 = a(a^2 + 6a + 9 + 2) + 6 = a[(a^2 + 6a + 9) + 2] + 6 = a[(a + 3)^2 + 2] + 6 = a(a + 3)^2 + 2a + 6 = a(a + 3)^2 + 2(a + 3) = (a + 3)(a^2 + 3a + 2) = (a + 3)(a + 2)(a + 1)$.

Розв'язування цих прикладів показує місце застосування правила розкладання многочлена на множники на різних проміжних етапах тотожних перетворень, а також дедалі зростаючий ступінь трудності цих перетворень у кожному наступному прикладі.

8. Кількість і складність теорем, формул і означень, які треба застосувати при розв'язуванні задачі.

9. Ступінь необхідності виявлення кмітливості і спритності для розв'язання задачі.

10. Складність зображення геометричного рисунка і необхідних додаткових побудов при розв'язанні геометричної задачі.

11. Введення додаткових невідомих величин при розв'язанні задач.

12. Використання для розв'язання даної задачі матеріалу з додаткової літератури тощо.

Збільшуючи ступінь трудності завдань для самостійної роботи, слід враховувати такі фактори:

1. Наростання так званих кількісних труднощів, тобто збільшення кількості добре знайомих учневі математичних обчислень і тотожних перетворень. Так, одну й ту саму теорему, наприклад теорему Піфагора, застосовують не один раз, а кілька.

2. Введення нових понять, з якими учні безпосередньо не стикаються на уроках, хоч труднощі, які виникають при цьому, можна перебороти, наперед продумавши теоретичний матеріал. Ці труднощі можна назвати труднощами якісного характеру.

Між цими двома факторами, які ускладнюють завдання, є глибока і принципова різниця. Кількісні труднощі помітити легко, якісні ж відомі тільки вчителеві, який знає, що саме вивчалося на уроках, а що є новим для учнів.

Завдання першого ступеня трудності (полегшене) нічим не відрізняється від тих, які виконували в класі колективно при закріпленні теоретичного матеріалу. Виконуючи ці завдання, учень повинен згадувати і застосовувати найістотніше з виучуваного матеріалу. Побічні труднощі, пов'язані з потребою виконувати попередні перетворення, додаткові побудови, обчислення та інше, зводяться в цих завданнях до мінімуму.

Складніші завдання, тобто завдання II ступеня трудності, містять усі компоненти попереднього і, крім того, передбачають необхідність виконання складніших тотожних перетворень, ніж у полегшеному варіанті, а також виконання додаткових побудов.

Найскладніші завдання, тобто завдання III ступеня трудності, обов'язково включають кілька нових, непередбачених для учнів моментів, які потребують певної кмітливості або оригінального застосування раніше вивченого матеріалу.

Проте й ці завдання не виходять за межі вимог програми. Наприклад, при вивченні нерівностей диференційовані завдання для самостійного виконання учнями можуть бути такими*.

I ступінь трудності

Розв'язати нерівності:

$$\frac{2x-3}{x+6} > 0; \quad \frac{3x-9}{2x+4} < 0.$$

Як бачимо, це завдання принципово нічим не відрізняється від тих, що розглядалися в класі при поясненні нового матеріалу. Розв'язанню нерівностей у ньому легко надати геометричної інтерпретації.

II ступінь трудності

Розв'язати нерівності:

$$(7x+2)(3+4x) > 0; \quad \frac{2x-3}{5-2x} < 1.$$

На перший погляд цей приклад не складніший, ніж першого ступеня трудності, але насправді це далеко не так. Тут учневі доводиться переборювати ті самі труднощі, що й при розв'язанні прикладу першого ступеня трудності, але, крім того, він повинен з'ясувати, що обидві частини нерівності не можна зводити до спільного знаменника, тому що знаменник дробу містить в собі невідоме.

Розв'язуючи перший приклад, учень може не помітити, що він тут має справу, по суті, з системою нерівностей, а тому може розкрити дужки і зайти в безвихідь. Крім того, і геометрична інтерпретація тут значно складніша, оскільки доводиться відкладати на числовій осі дроби $-\frac{2}{7}$ і $-\frac{3}{4}$. Порівняти усно величини цих дробів також значно важче, ніж чисел $\frac{3}{2}$ і -6 з раніше розглянутого прикладу.

III ступінь трудності

Розв'язати нерівності:

$$(3x+1)\cdot(4+3x)\cdot(2x-3)^2 < 0; \quad \frac{7x-5}{8x+3} < 4.$$

---

* З досвіду роботи вчителя Помошнянської школи № 2 Кіровоградської області Г. Й. Пашковського.

У першому прикладі учень змушений переборювати ті самі труднощі, що й при виконанні завдання другого ступеня трудності. Крім того, учень повинен передбачити, як впливає компонент $(2x - 3)^2$ на знак добутку і чи не перетворюється він на нуль при деяких значеннях x, що задовольняють нерівність $(3x + 1)(4 + 3x) < 0$, а також пам'ятати про неможливість зведення нерівностей до спільного знаменника.

Вивчаючи тригонометричні рівняння, які розв'язують прирівнюванням лівої частини до нуля і розкладанням її на множники, учням пропонували такі вправи диференційованого характеру:

I ступінь трудності

Розв'язати рівняння: $\sin x \cos x + \cos x = 0$.

Ліву частину розкладають на множники без застосування формул. Жоден із співмножників ні при яких значеннях x свого значення не втрачає.

II ступінь трудності

Розв'язати рівняння: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Тут треба застосувати формулу $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Тотожні перетворення у цьому випадку дещо складніші.

III ступінь трудності

Розв'язати рівняння: $\operatorname{tg} 3x = \sin 6x$.

Щоб розкласти ліву частину на множники, треба застосувати формули: $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$ і $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Тут потрібне дослідження допустимих значень невідомого.

При розв'язуванні задач з геометрії із застосуванням тригонометрії для самостійної роботи в XI класі пропонували такі задачі:

I ступінь трудності

З а д а ч а 1. Визначити довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда, якщо з основою вона утворює кут α.

Відомо, що діагональ основи із стороною основи a утворює кут φ.

Обчислити довжину діагоналі при $a = 15{,}6$ *см*; $\alpha = 38°10'$; $\varphi = 58°20'$ (рис. 13).

II ступінь трудності

З а д а ч а 2. Діагональ l прямокутного паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом φ, гострий кут між діагоналями основи β. Визначити об'єм паралелепіпеда. Визначити його числове значення при $\varphi = 32°36'$, $\beta = 48°35'$ і $BD_1 = 27{,}32$ *см* (рис. 14).

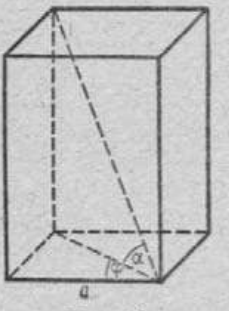


Рис. 13.

Кути, які потрібні для розв'язання першої задачі, задано. У другій задачі треба спочатку визначити гострий кут одного з прямокутних трикутників. Числові дані тут такі, що потребують складніших обчислень.

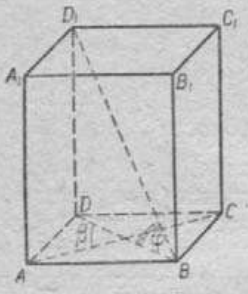


Рис. 14.

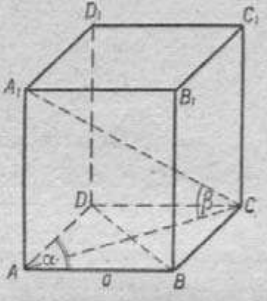


Рис. 15.

III ступінь трудності

З а д а ч а 3. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із стороною $a = 36{,}12$ *см* і гострим кутом $\alpha = 62°43'$. Більша діагональ паралелепіпеда з площиною основи утворює кут $\beta = 52°47'$. Визначити об'єм паралелепіпеда (рис. 15).

У цьому варіанті, обгрунтувавши, яка діагональ паралелепіпеда є найбільшою, учень повинен найраціональніше обчислити площу ромба.

Диференціювати за ступенем трудності можна, звичайно, і задачі практичного змісту.

I ступінь трудності

Розглядають випадок розкладання сил на підйомному крані (рис. 16).

Дано: F_Q, α, β.

Знайти: F_c, F_a.

II ступінь трудності

Дано: a, b, α, F_Q.

Знайти: F_c, F_a.

Рисунок той самий, що й до першої задачі.

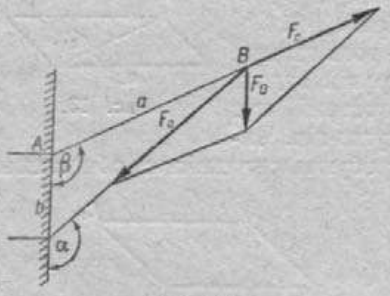


Рис. 16.

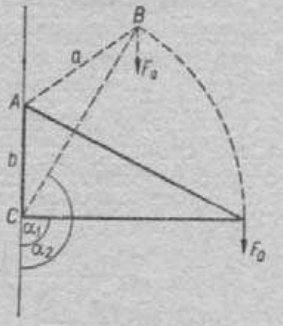


Рис. 17.

III ступінь трудності

Дано: α_1, α_2, a, b, F_Q (рис. 17).

Знайти: поперечний переріз троса при заданій міцності на розтяг і коефіцієнті надійності; радіус дії без зміни місця крана.

Складність цих задач полягає в наявності двох різних за характером основних величин — довжини і сили, тоді як кути, які є величинами нейтральними, можуть застосовуватися як у звичайному, так і векторному трикутниках.

Якщо в першому варіанті дані і шукані величини лежать або в звичайному, або у векторному трикутнику, то в другому варіанті у трикутнику треба обчислити такі відрізки, які можуть застосовуватися тільки у векторному трикутнику або застосовувати ознаки подібності трикутників. Але питання про шукані величини ще надто прозоре. У третьому варіанті, щоб відповісти на запитання, учень повинен визначити сам, які величини треба обчислювати як проміжні.

Слід мати на увазі, що завдання III ступеня трудності повинно містити елементи завдань I і II ступенів трудності,

а завдання II ступеня повинно містити елементи I ступеня трудності.

При застосуванні диференційованих завдань учнів треба навчити спочатку складати план розв'язування тієї чи іншої задачі, щоб можна було правильно визначити ступінь її трудності. Інакше може трапитись, що учні, недооцінивши складність завдання, візьмуться за його виконання і в результаті дістануть незадовільну оцінку.

Структура уроків тренувальних вправ

Уроки тренувальних вправ, як і інші типи уроків, за своєю структурою також динамічні. Структура їх залежить від виду, характеру і тривалості практичних робіт, а також від підготовки учнів. Цей тип уроків містить такі елементи:

а) фронтальне повторення теоретичного матеріалу і усне розв'язування задач і вправ;

б) колективне розв'язування задач і вправ;

в) поваріантне розв'язування задач і прикладів;

г) коментоване розв'язування задач і прикладів;

д) самостійну роботу над одним, спільним для всього класу завданням;

е) самостійну роботу над завданнями в кількох рівноцінних варіантах з додатковими завданнями для найбільш підготовлених учнів;

є) самостійну роботу над завданнями, диференційованими за ступенем трудності;

ж) обов'язкове коментоване розв'язування задач підвищеної трудності наприкінці уроку;

з) підведення підсумків уроку і домашнє завдання.

Практично тільки в окремих випадках урок має всі ці елементи. Якщо, наприклад, клас достатньо підготовлений до самостійної роботи, то немає потреби повторювати теоретичний матеріал чи колективно розв'язувати задачі або приклади. Отже, структуру уроку визначає сам учитель.

З точки зору дидактики уроки цього типу можна класифікувати так:

а) уроки тренувальних вправ;

б) уроки практичних занять на вимірювання на місцевості, конструювання і виготовлення наочних посібників, обчислення за допомогою лічильної лінійки і таблиць;

в) уроки лабораторно-практичних робіт;

г) уроки в шкільних майстернях, заводських цехах тощо;

д) уроки по опрацюванню підручників і додаткової літератури.

На уроках тренувальних вправ учні вчаться самостійно розв'язувати задачі і приклади, застосовувати теорію на практиці. Як правило, такі уроки практикують на другому уроці здвоєних уроків.

На лабораторних заняттях учні старших класів самостійно вимірюють поверхні, об'єми і вагу тіл, практично перевіряють справедливість тієї або іншої теореми, формули, розв'язують задачі за моделями, деталями машин тощо.

На заняттях у шкільних майстернях, заводських цехах і інших об'єктах учні, маючи попередню підготовку, безпосередньо застосовують математичні знання у відповідних виробничих умовах; тут здійснюється й зворотний зв'язок — виробничого навчання з математикою.

На заняттях з навчальною літературою старшокласники вчаться за підручником, працюють над книгою, самостійно вивчаючи новий матеріал.

Розпочинати урок з повторення теоретичних питань доводиться після вивчення нового матеріалу, коли інтервал між двома уроками значний (цілий тиждень) і, крім того, учні ще не набули міцних знань, практичних умінь і навичок. Розпочинаючи, наприклад, розв'язувати вправи з теми «Знаходження цілих коренів рівняння з цілими коефіцієнтами», учитель відновлює в пам'яті учнів, що шукані корені треба відбирати за допомогою випробувань з числа дільників вільного члена, пропонує їм коротко викласти весь процес розв'язування вправ цього типу.

Якщо твердої впевненості в тому, що навіть після такого повторення учні самостійно виконають відповідні завдання, немає, тоді можна спочатку одну-дві вправи розв'язати колективно. При цьому можна застосувати відомий прийом коментованого розв'язування задач і прикладів. Проте коментування в цьому випадку має вже інший характер, воно лаконічніше і не відтворює деталей розв'язування. Розв'язуючи, зокрема, квадратні рівняння, учні не спиняються на формулі коренів, значенні коефіцієнтів тощо, а відповідають коротко: «Розв'язуючи таке-то квадратне рівняння, маємо такі корені...»

Виконавши колективно вправу, учні приступають до самостійної роботи за варіантами завдань.

Якщо вчитель вважає доцільним максимально використати взаємодопомогу учнів, то завдання можна дати в од-

ному варіанті. А коли йдеться про матеріал, що його повинні засвоїти однаковою мірою всі учні класу (наприклад, розділ «Тригонометричні таблиці») і взаємодопомога не є бажаною, то завдання дають у кількох рівноцінних варіантах. При значній кількості варіантів ці завдання заносять на картки. Для найбільш підготовлених учнів додатково дають необов'язкові завдання підвищеної трудності, інколи як повторення.

Таку роботу проводять перед заліком або контрольною роботою, щоб остаточно виявити прогалини в знаннях учнів і рівень їх підготовки до підсумкової перевірки знань з певної теми.

Поширеною формою роботи на уроці тренувальних вправ є самостійне виконання завдань, диференційованих за ступенем трудності.

Під час виконання самостійних робіт на уроках тренувальних вправ учитель, як правило, знаходиться серед учнів. Він допомагає їм, вивчає сильні і слабкі сторони в їх знаннях і здійснює контроль.

Щоб перевірити і оцінити знання учня, вчитель іноді запрошує його до дошки або сідає з ним за однією партою, переглядає виконану роботу, домашнє завдання, напівголосно проводить з ним бесіду, не відволікаючи уваги інших.

При цьому можлива будь-яка оцінка. Якщо малопідготовлений учень добровільно вибрав варіант I ступеня трудності і успішно справився з ним, він все одно пишається своєю роботою, хоч за її виконання одержав тільки трійку. Нерідко можна почути таке: «Хоч на трійку, але сам розв'язав». На високу оцінку цей учень поки що не претендує, адже ж він сам вибрав найлегший варіант. Але відмову в оцінці після перевірки роботи учні сприймають як ознаку недовір'я. «Ви думаєте, що мені хто-небудь допомагав?» — іноді ображаються такі учні.

З іншого боку, якщо учень зовсім не підготувався до уроку, не знає формул і теорем, розглянутих на попередньому уроці, йому слід виставити оцінку «2». Проте ні в якому разі не можна ставити двійку, якщо учень засвоїв теоретичний матеріал, але поки що не вміє ним користуватися. Такому учневі треба просто допомогти, почекати з оцінкою.

Перевіряючи роботи в класі, вчитель користується чітко написаними розв'язками задач і прикладів у кількох можливих варіантах. Без цього не можна швидко й точно знайти і пояснити допущену в роботі помилку.

Переважну більшість уроків тренувальних вправ підсумовують, спиняючись на типових помилках, на вдалих розв'язках задач і прикладів, знайдених окремими учнями, та мотивуючи виставлені оцінки. Учитель всебічно заохочує учнів, які від легших варіантів завдань переходять до важчих. Та й самі учні тепер заперечують проти спільного для всього класу завдання і вимагають тільки варіантних завдань за ступенем трудності.

Внаслідок такої роботи в експериментальних класах помітно підвищилася успішність, а головне—якість знань.

На перевідних і випускних екзаменах у 1962/63 навчальному році з 448 учнів старших класів дев'яти шкіл Кіровоградської області оцінку «3» мали 111, тобто близько 25%, а решта — «4» і «5».

Приблизно така сама успішність і в інших школах, де вчителі по-новому організували навчання.

Використання допоміжних засобів навчання на уроках формування умінь і навичок

На уроках практичних занять, як і на уроках інших типів, широко застосовують різні допоміжні засоби навчання: таблиці, рисунки, епідіаскоп тощо. Ці засоби навчання сприяють свідомому засвоєнню математики, а також заощадженню навчального часу.

Наприклад, на уроках широко використовують виготовлені учнями діапозитиви, схему яких запропонував викладач Кіровоградського педагогічного інституту В. В. Пустовіт.

Думка про те, що користуватися світловою проекцією можна тільки в затемненому приміщенні, хибна. Адже наші школи постачаються проекційними апаратами, які мають потужні джерела світла. Наприклад, в епідіаскопі проекційна лампа потужністю в 500 *вт* дає можливість демонструвати на екрані прозорі зображення без затемнення класної кімнати; діапроектор ЛЭТИ-55 також розрахований на демонстрування діафільмів при денному освітленні.

У шкільних майстернях виготовити діапозитиви розміром 85 × 85 *мм* можна таким способом.

Нарізають із скла квадратні пластинки розміром 85 × × 85 *мм* (матеріалом може бути звичайне віконне скло), промивають їх у гарячій воді і просушують.

Рисунок геометричної фігури, нанесений на скляну пластинку, можна спроектувати за допомогою епідіаскопа при

денному світлі. Прямі сонячні промені при цьому не повинні потрапляти на екран.

Щоб спроектувати рисунок, вміщений у підручнику, пластинку накладають на рисунок і подібно до того, як кресляр переносить його на кальку, цей рисунок рейсфедером переносять на скло. Щоб нанести на скляну пластинку рисунок, якого немає в підручнику (наприклад, для розв'язання якої-небудь задачі), рисунок спочатку будують на папері, а потім переносять на скло.

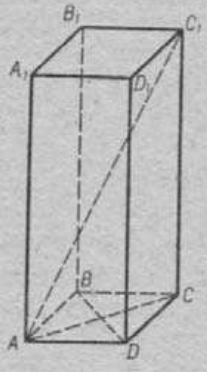


Рис. 18.

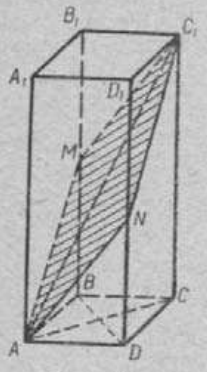


Рис. 19.

Перетини, деякі лінії тощо виділяють кольоровою тушшю. Відомо, що лінії, проведені на склі чорною тушшю, сохнуть дуже швидко (20—30 *сек*), а лінії, проведені кольоровою тушшю (червоною, зеленою),— дещо довше. Тому бажано спочатку наносити на скло чорні лінії, а потім кольорові. Зайві лінії або плями від туші після висихання легко зняти гострим предметом. Щоб накреслити коло на склі, на якому не тримається ніжка циркуля, місце центра майбутнього кола змочують силікатним клеєм.

У незатемненому класі на екрані можна дістати зображення розміром 90 × 90 *см*, що дає змогу рисунки деяких складних геометричних фігур розглядати докладніше.

Якщо вчитель доводить теорему або пояснює геометричну фігуру, то він послідовно виконує необхідні побудови, що відповідають окремим моментам доведення теореми або розв'язання задачі. Розв'язуючи, наприклад, задачу № 39 з § 25 (Н. Рибкін, Збірник задач з геометрії, ч. II), ми спочатку розглядаємо рисунок призми без січної площини (рис. 18) і тільки після аналізу задачі — повний рисунок (рис. 19). Отже, для якісного розв'язування задач такого типу треба мати кілька рисунків на склі, щоб кожний з них відповідав окремим етапам розв'язання задачі. У деяких випадках такі рисунки можна вмістити на одній скляній пластинці.

Проте ілюстрування рисунків за допомогою епідіаскопа під час розв'язування задач або доведення теорем учнями непридатне. Тому можна запропонувати новий метод зображення геометричних фігур на так званій дошці-екрані.

Дошка-екран — це звичайна лінолеумова або фанерна дошка, пофарбована в білий колір. На такому екрані можна писати кольоровою крейдою або проектувати рисунки.

Розв'язуючи деякі складні задачі із стереометрії, багато часу витрачають на виконання на дошці рисунка основної фігури (призми, піраміди, конуса тощо). Але не менш важливо мати також і додаткові побудови до основної фігури. До того ж на п'ятому-шостому уроці виучуваної теми переважна більшість учнів вже добре вміє зображати основну фігуру. Тому її можна спроектувати на дошку-екран, а додаткові побудови учні повинні виконувати кольоровою крейдою. Таким чином, на дошці-екрані матимемо комбінований рисунок.

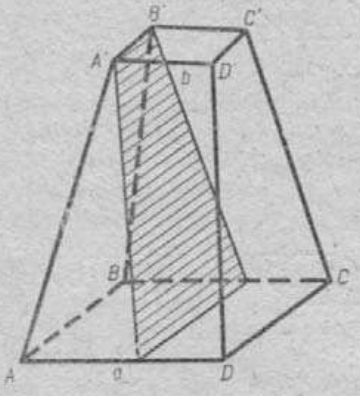


Рис. 20.

Наводимо приклади.

Розв'язуючи задачу № 32 з § 25 (Н. Рибкін, Збірник задач з геометрії, ч. II), за допомогою епідіаскопа демонструють основний рисунок (зрізану піраміду), а основну частину розв'язання задачі, тобто необхідні додаткові побудови (площину, паралельні грані та інші лінії), виконують кольоровою крейдою (рис. 20).

Хоч можливості використання епідіаскопа на уроках математики цим не обмежуються, проте можна сказати, що в більшості випадків спроектованим рисунком або текстом можна замінити переносну дошку. Наприклад, якщо провадять контрольну або самостійну роботу за варіантною системою, то умови задач або прикладів заздалегідь можна написати тушшю на скляній пластинці, а в класі спроектувати на екран. В окремих випадках можна проектувати графіки різних функцій.

Переваги описаного вище методу унаочнення такі:

а) заощадження навчального часу, оскільки рисунки на склі виконують заздалегідь;

б) висока якість зображення внаслідок виконання рисунків кольоровою тушшю;

в) виконання вимог естетичного виховання учнів;

г) демонстрування в незатемненому класі, що дає змогу вчителеві тримати в полі зору весь клас, а учням одночасно вести записи в зошитах;

д) наочне зображення складних геометричних фігур, що сприяє розвиткові просторового уявлення;

е) збільшення інтересу учнів до предмета.

є) простота виготовлення прозорих рисунків і креслень.

Для розв'язування задач на уроках використовують різні готові таблиці, зокрема взяті з польського журналу «Математика», 1960, № 4 (див. таблиці № 1—9, додаток 2). Ці таблиці можна перенести на діапозитиви і демонструвати на дошці-екрані під час коментованого розв'язування задач і виконання самостійних робіт.

Перевірка знань і оцінювання роботи учнів на уроках практичних занять

Як зазначалося вище, основна мета уроків тренувальних вправ — це формування умінь і навичок учнів. Але сама організація колективного і диференційованого навчання на цих уроках не тільки не виключає контролю і оцінювання знань учнів, а й створює умови для найкращого виявлення їх знань, умінь і навичок.

Знання учнів на уроках тренувальних вправ учитель перевіряє і оцінює здебільшого під час виконання самостійних робіт. У процесі індивідуального навчання вчитель має можливість одержати від кожного учня зворотну інформацію *, тобто виявити його знання, причому не обов'язково у вигляді відповіді на запитання, а у й процесі спостережень під час самостійної роботи, на консультаціях, під час розв'язування задач і відповідей на запитання самих учнів тощо.

Наявність спеціальних уроків тренувального характеру з великою кількістю різноманітних самостійних робіт збільшує можливості вчителя для одержання зворотної інформації.

Виявляючи знання, уміння і навички учнів на кожному уроці в процесі диференційованого навчання, учитель

* Під *зворотною інформацією* ми розуміємо такий процес, який іде від учня до вчителя і дає змогу визначити ступінь засвоєння ним знань.

знання одних учнів оцінює відповідною оцінкою, а про рівень знань інших робить тільки відповідні помітки у своєму зошиті, щоб на наступних уроках повніше виявити і оцінити їх знання.

Наприкінці кожного уроку вчитель підводить підсумки самостійної роботи і повідомляє оцінки тим учням, знання яких вдалося виявити в достатній мірі.

Педагогічна основа усіх видів практичних занять одна й та сама — органічне поєднання формування умінь і навичок, повторення раніше засвоєного матеріалу і контролю знань. Злиття усіх цих процесів — найважливіша умова ефективного навчання.

На всіх видах роботи тренувального характеру вчителі оцінюють знання учнів тільки тоді, коли в них сформувалися певні уміння і навички для самостійного виконання диференційованих завдань певного ступеня трудності або ж спільного завдання для всього класу.

Приклади уроків типу закріплення знань, формування умінь і навичок

Приклад 1. *Урок практичних занять на тему «Об'єм циліндра»* (Середня школа № 2 м. Олександрії, вчитель Р. І. Львівський)

Тема уроку. Лабораторна робота на знаходження ваги *n* метрів дроту для намотування трансформаторів ЕМЗ (електромеханічного заводу).

Мета уроку. Практичне застосування формул для визначення об'єму круглих тіл. Знаходження абсолютної та відносної похибок.

Обладнання

1. Картки із зразками дроту, зазначенням числа витків і середньої довжини витка.
2. Вимірювальний інструмент — штангенциркулі, мікрометри (на кожну парту).
3. Логарифмічні лінійки, таблиці Брадіса, таблиці густини речовин.
4. Терези (на кожну парту).
5. Бухти дроту заданого діаметра і довжини (на кожного учня).
6. Інструкція (на кожного учня).

Інструкція до проведення лабораторної роботи

З а в д а н н я. Знайти вагу дроту для намотування трансформатора:

1. Скласти буквену формулу об'єму і ваги тіла.
2. Виконати потрібні вимірювання.
3. Скласти числову формулу ваги тіла.
4. Найраціональніше виконати обчислення.
5. Виконати самоперевірку (прикидку) відповіді.
6. За допомогою зважування знайти фактичну вагу тіла
7. Знайти абсолютну і відносну похибку.
8. Записати відповідь.
9. Оформити і здати роботу вчителеві.

Для виявлення ініціативи і самостійності учнів інструкції не конкретизовано. Наприклад, у пункті 2 сказано: «Виконати потрібні вимірювання», а не: «Виміряти діаметр дроту» тощо. Кожний учень вклеює інструкцію в свій зошит.

П і д г о т о в к а д о у р о к у

Під час перерви вчитель і лаборант (фізичного кабінету) розкладають картки, інструкції, а також інструмент і бухти дроту, які мають такий самий номер, як і картки. На штативах розставляють терези. Зошити, лінійки і таблиці учні приготували заздалегідь.

Перед виконанням лабораторної роботи вчитель проводить таку бесіду:

— На практиці часто доводиться визначати вагу *n* метрів дроту за його діаметром. Наприклад, на Олександрійському електромеханічному заводі при намотуванні трансформаторів вагу дроту визначають за сумою ваги пластин, футляра і дроту.

Кожному з вас завдання визначено на картці. Які вимірювання і як їх треба виконувати, щоб розв'язати задачу,— зміркуйте самі. Усе необхідне для цього перед вами. Вирішуйте, як раціональніше виконати обчислення. При описі роботи вкажіть, як і за допомогою якого приладу чи таблиці виконано обчислення. Таблиця густини речовини — на звороті логарифмічної лінійки. Матеріал в усіх однаковий — мідь. Чому? Терезами користуватися тільки після того, як знайдете відповідь. Якщо виникнуть труднощі, звертайтеся до вчителя. Роботу оформити з додержанням культури математичних записів.

Після такої бесіди клас розпочинає самостійну роботу.

Підведення підсумків роботи

Роботи учнів по можливості перевіряють і виставляють оцінки. За 5 *хв* до закінчення уроку до дошки викликають одного з учнів, який повідомляє про хід виконання роботи:

1. За якою формулою обчислено вагу?
2. Як обчислено πR^2?
3. У яких одиницях виражено D і l (діаметр і довжину дроту)?
4. Що дало зважування?
5. Де застосовано правила наближених обчислень?
6. Яка відносна похибка (обчисленої ваги відносно фактичної)?

Завдання додому записано раніше: Н. Рибкін, § 18, № 40.

Приклад 2. *Урок тренувальних вправ.* (Середня школа № 20 м. Олександрії, вчитель І. Т. Чорний).

Тема уроку. Розв'язування тригонометричних рівнянь через зведення їх до однієї тригонометричної функції одного аргументу.

Обладнання

1. На дошці записано найпростіші рівняння: $\sin x = 0$; $\sin x = 1$; $\cos x = 1$; $\operatorname{tg} x = 1$. Нарисовано одиничний круг (рис. 21).

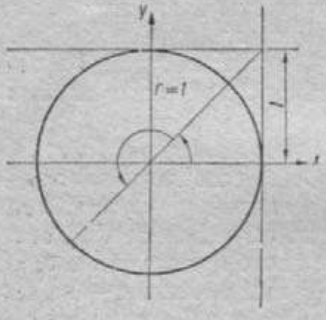


Рис. 21.

2. Таблиця з графічними розв'язаннями рівнянь $\sin x + \cos x = 1$ і $2\sin x = \operatorname{ctg} x$.

Хід уроку

Вчитель фронтально перевіряє виконання домашнього завдання:

$$\sin 2x - 3 = 2\sin x;$$
$$\cos^2 x + \cos x = 1;$$
$$2\sin^2 x = 3\cos x;$$
$$\sqrt{3}\operatorname{tg} x = 1,$$

а один з учнів записує формули загального виду кутів, що відповідають даному значенню тригонометричної функції:

$$\sin x = 0; \quad \sin x = 1; \quad \operatorname{tg} x = 1;$$

$$x = k\pi; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi;$$

$$(k = 0; \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots),$$

і пояснює ці розв'язки на одиничному крузі.

Далі вчитель пропонує вправи з логарифмічною лінійкою: знайти найменше значення $|x|$ у рівняннях:

$$\sin x = \sin 37°15' - 1; \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 40° + 70;$$

$$x \approx -23°15'; \qquad x \approx 89°11';$$

$$\cos x = -0{,}5688; \qquad \operatorname{ctg} x = -0{,}6822;$$

$$x = \pm(\pi - \arccos 0{,}5688) + 2k\pi; \quad x = (\pi - \operatorname{arcctg} 0{,}6822) + k\pi$$

Після цього вчитель пропонує рівняння $\sin x + \cos x = 1$ і зауважує, що кожне тригонометричне рівняння можна розв'язати по-різному, тому точний розподіл на типи не обов'язковий.

— Хто запропонує найпростіше розв'язання ?— запитує вчитель.

Учні пропонують замінити $\cos x$ через $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ і самостійно розв'язують рівняння.

$$\cos x = 1 - \sin x; \quad \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 - \sin x;$$

$$1 - \sin^2 x = 1 - 2\sin x + \sin^2 x;$$

$$2\sin^2 x - 2\sin x = 0; \quad \sin x = 0; \quad x = k\pi \ (k \text{ — парне});$$

$$\sin x = 1; \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k = 0; \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Учитель пропонує одному з учнів коментувати основні моменти перетворень, зауважуючи при цьому, що внаслідок піднесення обох частин рівняння до квадрата можуть з'явитися сторонні корені, тому перевірка обов'язкова.

Перевірка: $k = 2$; $x_1 = 360°$; $0 + 1 = 1$, $1 = 1$;

$k \neq 2$; $x_2 = 720° + 90°$; $1 + 0 = 1$, $1 = 1$.

Інший учень пропонує другий спосіб розв'язання за допомогою піднесення обох частин рівняння до квадрата:

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1; \quad \sin 2x = 0;$$

$2x = k\pi$; $x = \frac{k\pi}{2}$. Для даного рівняння $k = 4n$, $k = 4n + 1$.

Один з учнів перетворює ліву частину рівняння в добуток:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin(45^\circ + x) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$45^\circ + x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 180^\circ k;$$

$$x = \pi k + \frac{\pi}{4}[(-1)^k - 1].$$

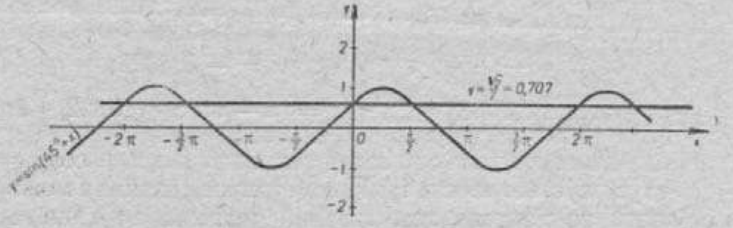


Рис. 22.

Далі вчитель пропонує учням розглянути таблицю, на якій вміщено два рисунки (рис. 22 і 23) графіків тригонометричних функцій і пояснити перший рисунок. Один з учнів за допомогою графіка пояснює графічне розв'язання тригонометричного рівняння (рис. 22).

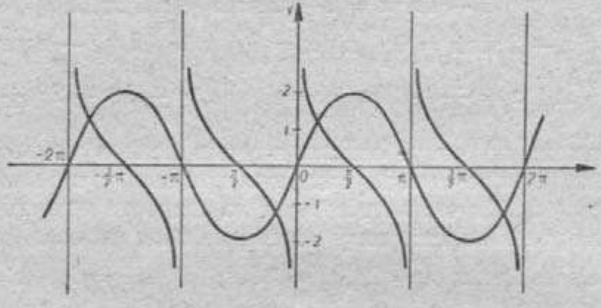


Рис. 23.

Після цього ставить таке запитання: «Розв'язання якого тригонометричного рівняння зображено на другому рисунку (рис. 23)?».

Учень відповідає, що на рисунку зображено графічне розв'язання рівняння $2\sin x = \operatorname{ctg} x$.

Потім учні протягом 15 *хв* виконують самостійну роботу в трьох варіантах за ступенем трудності.

Розв'язати такі тригонометричні рівняння:

I варіант (підвищена трудність)

$$\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)+3=0;\quad \sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\pi\right)=1;$$

$$\operatorname{tg}x=\sin 44^\circ+\cos 66^\circ;\quad \sin x=1-\operatorname{ctg}66^\circ;$$

$$\sin x+\cos x=\sec x+\operatorname{cosec}x;\quad \cos^2 x=\cos x-\sin x.$$

II варіант (середня трудність)

$$\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}=1;\quad \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1;$$

$$\operatorname{tg}x=\sin 25^\circ 30';\quad \sin x=\cos 63^\circ 20';$$

$$\sin^2 x-\cos^2 x=\cos x;\quad 3\operatorname{tg}^2 x-\sec^2 x=1.$$

III варіант (найлегший)

$$2\sin x=1;\quad \cos x-\frac{1}{2}=0;$$

$$\operatorname{tg}x=0{,}486;\quad \sin x=0{,}5688;$$

$$3\sin x=2\cos^2 x;\quad 2\cos^2 x+3\sin x=0.$$

Під час виконання роботи вчитель спостерігає за учнями, допомагає їм, ставить запитання учням, а також сам відповідає на їхні запитання. Наприкінці уроку окремим учням вчитель виставляє оцінки.

Завдання додому: § 50, № 155 (2), 157 (1, 2).

Приклад 3. *Урок тренувальних вправ* (Середня школа № 13 м. Олександрії, вчитель С. С. Міняйло)

Тема уроку. Обчислення довжини кола і довжини дуги в n°.

Хід уроку

1. Фронтальна перевірка знань учнів 9-го класу за такими запитаннями:

а) означення довжини кола;

б) формула довжини кола;

в) означення числа π. Чому точне значення π не можна виразити скінченною кількістю десяткових знаків? Чому дорівнює значення π з точністю до 0,01?

г) означення кола;

д) чи можна побудувати число π за допомогою циркуля і лінійки?

е) прочитати формулу довжини дуги радіуса R, яка має n°;

є) радіус кола зменшено вдвічі; чи зміниться при цьому значення числа π?

ж) радіус кола дорівнює 2 *дм*; чому дорівнює довжина дуги, яка має 90°?

II. Самостійне розв'язування задач у двох варіантах різних ступенів трудності.

Тексти для самостійних робіт

I варіант

I ступінь трудності (на оцінку «3»)

Задача 1. Відстань між центрами двох шківів однакового діаметра дорівнює 140 *см*. Діаметр кожного шківа 20 *см*. Знайти з точністю до 1 *см* довжину паса, надітого на шківи.

Задача 2. Коло радіусом 12 *см* розігнуте в дугу, центральний кут якої дорівнює 135°. Знайти радіус дуги.

II ступінь трудності (на оцінку «4»)

Задача 1. З двох концентричних кіл довжина зовнішнього кола дорівнює 8,3 *дм*, а внутрішнього 7,6 *дм*. Знайти з точністю до 0,1 *см* ширину кільця.

Задача 2. Діаметр шківа 400 *мм*, кут захвату шківа пасом $x = 244°30'$. Знайти довжину дуги захвату шківа пасом з точністю до 1 *мм*.

III ступінь трудності (на оцінку «5»)

Задача 1. Навколо кола описано рівнобедрену трапецію з кутом 30°. Середня лінія її дорівнює 2 *см*. Знайти довжину кола.

Задача 2. Який шлях між кінцями дуги сектора коротший: по дузі чи по радіусах, якщо кут між радіусами сектора дорівнює 120°?

II варіант

I ступінь трудності (на оцінку «3»)

Задача 1. Ведуче колесо автомобіля діаметром 0,8 *м* робить 500 обертів за хвилину. Яку відстань пройде цей автомобіль за 1 *год?*

З а д а ч а 2. Дуга, радіус якої 6 *см* і центральний кут 120°, зігнута в коло. Знайти радіус кола.

II ступінь трудності (на оцінку «4»)

З а д а ч а 1. Знайти ширину металевого кільця, зовнішнє коло якого має довжину 157 *см*, а внутрішнє 126 *см*.

З а д а ч а 2. У коло радіусом $R = 2$ *дм* вписано правильний трикутник, на стороні якого побудовано квадрат. Навколо квадрата описано коло. Знайти довжину кола.

III ступінь трудності (на оцінку «5»)

З а д а ч а 1. Знайти довжину паса; на рис. 24 O і O_1 — центри двох шківів, радіуси яких дорівнюють 8 *дм* і 2 *дм*, $\angle AOO_1$ дорівнює 60°.

З а д а ч а 2. Знайти швидкість різання при обточуванні вала на токарному верстаті, якщо діаметр вала дорівнює 15 *дм*, а шпиндель робить 300 обертів за хвилину.

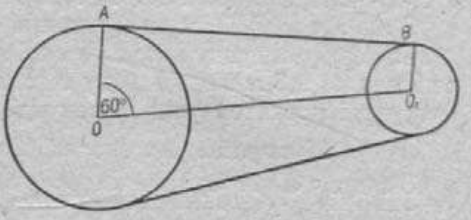


Рис. 24.

III. Учні пояснюють (усно) розв'язання задач II і III ступенів трудності.

IV. Підсумки уроку.

V. З а в д а н н я д о д о м у: 1) Задачі II і III ступенів трудності для тих, хто не розв'язав їх у класі; 2) Н. Р и б к і н, ч. I, § 8, задача № 17 для тих, хто виконав у класі завдання II і III ступенів трудності.

Приклад 4. *Урок тренувальних вправ* (Середня школа № 13 м. Олександрії, вчитель С. С. Міняйло)

Т е м а у р о к у. Розв'язування задач на арифметичну прогресію.

Х і д у р о к у

I. Фронтальна перевірка знань учнів IX класу за такими запитаннями:

1. Означення арифметичної прогресії, приклади.
2. Формула будь-якого члена арифметичної прогресії.
3. Формула суми членів арифметичної прогресії.
4. Властивості членів арифметичної прогресії.
5. Числа, якими вимірюють кути прямокутного трикутника, становлять арифметичну прогресію. Знайти ці кути.

6. Яку послідовність утворюють числа, що виражають суми внутрішніх кутів трикутника, чотирикутника і п'ятикутника?

7. Чи може сума скінченного числа членів арифметичної прогресії дорівнювати нулю?

II. Самостійна робота за варіантними завданнями.

Тексти для самостійної роботи

I варіант

I ступінь трудності (на оцінку «3»)

Задача 1. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 3, останній 63, число членів 16. Знайти різницю і суму членів арифметичної прогресії.

Задача 2. Тіло, яке падає в безповітряному просторі, за першу секунду проходить 4,9 *м*, а за кожну наступну секунду на 9,8 *м* більше. Яку відстань воно пройде за 21-у секунду і протягом усіх 21 секунд?

II ступінь трудності (на оцінку «4»)

Задача 1. Сума четвертого і десятого членів прогресії дорівнює 44, а сума другого і п'ятнадцятого — 53. Знайти перший член і різницю прогресії.

Задача 2. Визначити сторони многокутника, у якого числа градусів його внутрішніх кутів становлять арифметичну прогресію з першим членом 100° і різницею 10°.

III ступінь трудності (на оцінку «5»)

Задача 1. Щоб своєчасно виконати планове завдання, бригада робітників повинна була щоденно виготовляти 250 деталей. За перший день було виготовлено 200 деталей, а кожного наступного дня виготовляли на 40 деталей більше; на кінець строку виготовлено 300 деталей понад план. На скільки процентів бригада перевиконала планове завдання?

Задача 2. Знайти x з рівняння $1 + 4 + 7 + \ldots + x = 117$.

Тексти для самостійної роботи

II варіант

I ступінь трудності (на оцінку «3»)

Задача 1. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 1, останній член дорівнює 81, число членів 17. Знайти різницю і суму членів.

З а д а ч а 2. Тіло, яке вільно падає в безповітряному просторі, за першу секунду проходить 4,9 *м*, а за кожну наступну секунду на 9,8 *м* більше. Скільки секунд воно падатиме з висоти 4410 *м*?

II ступінь трудності (на оцінку «4»)

З а д а ч а 1. Сума третього і сьомого членів прогресії дорівнює 4, а сума другого і чотирнадцятого членів дорівнює 8. Знайти перший член і різницю прогресії.

З а д а ч а 2. Периметр многокутника дорівнює 158 *см*, довжини його сторін становлять арифметичну прогресію, різниця дорівнює 44 *см*. Скільки сторін має многокутник?

III ступінь трудності (на оцінку «5»)

З а д а ч а 1. Щоб вчасно виконати планове завдання, тракторна бригада повинна щоденно обробляти 125 *га*. За перший день виорано 100 *га*, кожного наступного — на 20 *га* більше, а до кінця строку виорали на 150 *га* більше проти плану. На скільки процентів бригада перевиконала планове завдання?

З а д а ч а 2. Знайти x із рівняння $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$.

III. Учні пояснюють (усно) розв'язування задач II і III ступенів трудності.

IV. П і д с у м к и у р о к у.

V. З а в д а н н я д о д о м у. 1) задачі II і III ступенів трудності для тих, хто не розв'язав їх у класі; 2) П. О. Л а р і ч е в, ч. II, задача № 762 для тих, хто виконав завдання II і III ступенів трудності.

§ 5. УРОКИ-СЕМІНАРИ

Уроки-семінари як форму навчальних занять використовують з метою систематизації, узагальнення, розширення і закріплення знань, умінь і навичок учнів з вивченої теми, розділу або всього курсу.

Як на уроках вивчення нового матеріалу, так і на інших типах уроків проводиться значна робота щодо систематизації і узагальнення навчального матеріалу, але для глибокого і міцного засвоєння виучуваного предмета вона все-таки недостатня. Велике значення має доповнення цієї роботи уроками-семінарами.

Урок-семінар, або, що одне й те саме, урок узагальнюючого повторення, не є чимось новим. Цю форму навчальної роботи передові вчителі при вивченні таких предметів, як література, історія та інші, застосовували давно. Н. К. Крупська писала: «У галузі явищ природи і суспільних явищ не стільки має значення засвоєння великої кількості фактів, скільки дослідження явищ, їх послідовності, взаємозалежності, причин і наслідку» *.

Уроки систематизації і узагальнення вивченого матеріалу з математики у шкільній практиці зустрічалися дуже рідко. В роботі кіровоградських учителів цей тип уроків знайшов широке застосування. Семінаром цей тип уроків названо тому, що на них практикують семінарські види робіт: реферати, доповіді, повідомлення та ін.

Запроваджуючи уроки-семінари, ми враховували також мету і завдання, які ставить при вивченні математики навчальна програма: «Мета викладання математики в середній школі,— говориться в програмі,— поглибити і розширити основи знань, умінь і навичок, потрібних для загального математичного розвитку учнів, для їх практичної діяльності і для продовження освіти у вищій школі».

Уроки-семінари відповідають також іншій важливій вимозі програми: «Повторення раніше вивченого матеріалу треба проводити протягом усього навчального року; воно повинно передбачати більш повне розкриття значення і змісту раніше набутих математичних відомостей, приведення їх у систему, виявлення їх взаємних зв'язків, схожості і відмінності з новим матеріалом».

Ці завдання значною мірою розв'язують за допомогою семінарських занять. Вони сприяють тому, щоб суму розрізнених математичних фактів, теорем і формул, раніше набутих учнями з тієї або іншої теми, перетворити в єдину логічно послідовну систему знань, розвинути математичне мислення учнів.

Введення семінарських занять у старших класах середньої школи дає також змогу навчити старшокласників самостійно працювати. Адже після закінчення середньої школи більшість учнів іде на виробництво, де їм доводиться розв'язувати найрізноманітніші практичні завдання. Тому випускник середньої школи повинен мати навички самостійної

---

* Н. К. Крупская, Избранные педагогические произведения, М., Учпедгиз, 1957.

роботи над собою, щоб не відстати від бурхливого зростання науки і техніки.

Підготовчий процес до семінару і самий семінар привчають учнів краще засвоювати способи розв'язування типових задач, схеми доведень по всій вивченій темі або розділу. При цьому велика увага приділяється не тільки формальному доведенню теорем або практичному їх застосуванню, а й набуттю учнями досвіду знаходження оригінальних доведень.

Як показала практика, такі семінари активізують увагу учнів, викликають зацікавленість предметом, почуття радості в зв'язку з «відкриттям» нового. Урок-семінар особливо сприяє розвиткові в учнів творчості, самостійності, здібностей, любові та інтересу до математики. Семінарські заняття разом з іншими типами уроків створюють умови для виявлення старшокласниками ще в межах школи свого покликання, нахилів, привчають творчо працювати і готувати себе до життя.

Уроки-семінари дають широкі можливості для кращого ознайомлення з кожним учнем, визначення його сильних і слабких сторін, подання певної допомоги, залучення до роботи й розвитку здібностей, а, можливо, й таланту. Адже талант — це перш за все велика наполеглива праця.

Семінарські заняття виховують критичне ставлення до вивчуваного предмета, спонукають до ознайомлення з посібною літературою.

Нерідко доводиться чути скарги учнів на недостатність самостійної роботи в опануванні ними математики в школі, що змушує їх потім витрачати роки на те, щоб, навчаючись в інституті або працюючи на виробництві, відвикнути від підказок і опіки. Треба розумно і тактовно направляти ініціативу учнів, давати їм можливість вступати в творчі дискусії.

«Учень ніколи не перевершить учителя, якщо вбачає в ньому зразок, а не суперника»,— говорив В. Г. Бєлінський. Окремі ж учителі нерідко уникають тих ситуацій, де вони можуть виявитися не тільки суперниками, а й переможеними, хоч іноді поразка вчителя в суперечці стає його найбільшою перемогою.

Не поразкою, наприклад, а перемогою було для вчителя Бюттнера, який навчав Карла-Фрідріха Гаусса (1777—1855 рр.) у початковій школі, коли маленький Карл дав правильну відповідь і запропонував дотепний метод розв'я-

зання такої задачі: «Обчислити суму всіх цілих чисел від 1 до 100, тобто таку суму: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 37 + 38 + ... + 100$». Учень помітив, що числа від 1 до 100 можна розкласти на 50 рівних пар, кожна з яких дорівнює 101, тобто $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = ... = 101$, а сума, отже, є $101 \cdot 50 = 5050$.

Семінарські заняття значною мірою розв'язують важливу проблему виховання в учнів відповідальності в навчальній роботі, привчають самостійно переборювати труднощі.

Уроку-семінару передує самостійна творча робота учнів над стабільними підручниками і збірниками задач, додатковою літературою, вказаною вчителем до даної теми, складання оригінальних доведень і найбільш раціональних способів розв'язання задач, виготовлення наочних посібників, підготовка доповідей і рефератів.

Під час підготовки до семінарських занять учням роз'яснюють мету цих занять, вказують на важливість і цінність пошуків нових шляхів при розв'язанні тих або інших питань, на потребу думати, шукати.

До уроку-семінару учні готуються з самого початку вивчення певної теми. Для цього їх знайомлять з запитаннями, які потім буде винесено на семінар.

План семінару з вказівкою на додаткову літературу і дату його проведення вивішують у шкільному математичному кабінеті або на видному місці в шкільному чи класному математичному куточку.

Залежно від обсягу і труднощів теоретичної частини теми, характеру і складності її практичного застосування на семінарське заняття відводять один або два уроки.

Перед кожним семінаром проводять інструктаж, на якому вчитель пропонує учням ряд завдань, тісно пов'язаних з безпосереднім вивченням відповідного матеріалу за стабільним підручником і іншими літературними джерелами та практичним застосуванням цього матеріалу.

Питання на семінари виносять не тільки ті, відповіді на які легко знайти в підручнику (означення, правила, доведення теорем, виведення формул), а й такі, що вимагають міркувань, кмітливості, розуміння найважливіших математичних положень, пов'язаних з доведенням теорем, виведенням формул, застосуванням теорії на практиці, вивченням інших шкільних предметів тощо.

З метою розвитку світогляду учнів у план семінару вклю-

чають також і такі питання, які хоч і пов'язані з вивченням відповідної теми, але відповідь на них учні старших класів можуть знайти тільки в додатковій навчальній, науково-популярній, технічній, історичній та іншій літературі, а також у матеріалах проведених екскурсій, навчально-виробничої практики тощо.

Планом семінарських занять обов'язково передбачають питання, пов'язані з оригінальним доведенням теорем, виведенням формул, складанням задач і вправ, виготовленням різноманітних наочних посібників (моделей, таблиць, графіків, рисунків тощо). Відповіді на запитання, вказані в плані семінару, учні готують у різній формі. На одні запитання відповіді оформляють у вигляді рефератів або доповідей з додатком до них потрібних наочних посібників, на інші — усно.

Бажаючих виступити на семінарі виявляється завжди багато. Учні, які брали активну участь у роботі на всіх уроках, що передували семінару, і виявили глибокі й міцні знання, уміння і навички на семінарі, від заліку звільняються. Тому старшокласники не тільки сумлінно готуються до семінарських занять, а й з любов'ю виготовляють різні наочні посібники, у тому числі й оригінальні, якими вони користуються при відповідях. Під час підготовки до семінару кожний учень прагне до того, щоб його відповідь супроводилась при потребі конкретними прикладами з історії математики, зв'язку математики з життям, досягненнями науки і техніки, відомостями з інших джерел.

На семінарських заняттях увагу старшокласників зосереджують на вузлових питаннях теми, на встановленні логічних взаємозв'язків між окремими її частинами та з іншими темами або розділами курсу математики, на її ролі у вивченні предмета. При цьому вчитель намагається допомогти учням систематизувати свої знання, надати їм характеру справжньої переконливості. Посилюються вимоги до теоретичної підготовки учнів, до творчого підходу при доведенні теорем, виведенні формул, застосуванні теорії для обгрунтування різних математичних положень. Внаслідок цього учні вчаться правильно висловлювати свої думки, розвивати математичну мову.

Так, на уроці-семінарі з теми «Многогранники» один з учнів навів цікавий приклад, про який він прочитав у журналі. Кілька років тому до відомого математика академіка

А. М Колмогорова звернулися будівельники однієї з гідроелектростанцій Сибіру. Вони повідомили, що швидка течія не дає змоги перекрити русло ріки звичайним способом. Тому будівельники хотіли знати форму кам'яних брил, якими можна було б зупинити ріку. Вчені зробили розрахунки і встановили, що перекривати ріку треба бетонними тетраедрами. Крім того, можна було також підрахувати кількість тетраедрів, достатню для перекриття ріки. Виявилося, що треба 7 500 тетраедрів. Щоб уникнути помилки, будівельники подвоїли цю цифру. А потім якось збільшили її ще. На берег ріки привезли 35 000 бетонних пірамід. Скинули 7 500, а більше не знадобилося. Так зайві брили залишилися на березі своєрідним пам'ятником невірам у математику.

На семінарах бувають також і короткі (3—5 *хв*) бесіди, пов'язані з різними легендами і реальними фактами з математики, з людьми, які проявили інтерес, захоплення і здібності в математиці. Такі бесіди ще більше захоплювали учнів цим предметом.

Так, на семінарі з теми «Границі» учень IX класу Кіровоградської школи № 6 розповів про цікаву легенду, описану в одному з номерів російської дореволюційної газети, що збереглася в місцевому музеї.

У газеті повідомлялося, що в Одесі помер маловідомий кравець, який залишив після себе ножну машину, купу обрізків, незакінчений чоловічий костюм і... товстого зошита, списаного кострубатим почерком людини, рука якої більше звикла тримати голку, ніж перо. Нащадки хотіли викинути зошити у піч, але студент, що виявився поруч, розкрив його... Перед ним була струнка теорія диференціального числення! Малописьменний кравець, який ніколи не чув про Ньютона і Лейбніца, сам створив цю теорію, затративши на неї все своє життя.

Ця розповідь викликала пожвавлення в класі. Одні учні виявляли сумнів, інші висловлювали припущення про можливість такого випадку. Один з них, наприклад, зауважив, що знаменитий математик Софія Ковалевська у восьмирічному віці почала цікавитися диференціальним численням — розділом вищої математики.

Інший учень розповів про такий випадок. У 1959 р. в журналі «Юный техник» було оголошено конкурс на розв'язання задач. Розв'язок цих задач подав до редакції також 9-річний хлопчик. Як виявилося, він розв'язав усі задачі

всього за чотири години. Було з'ясовано також, що в 5-річному віці він усно перемножав двозначні числа, а в 6-річному, зацікавившись тригонометрією, усно обчислював квадратні корені.

Учитель навів ще приклади. У 1960 р. «Літературна газета» повідомляла про талановитого математика Женю Гутникова, який у 4-річному віці вступив до першого класу, а в 14 років був прийнятий на фізико-математичний факультет університету.

А ось ще випадок. Дев'ятирічна Соня Л. складала рівняння за досить складними умовами задач, виконувала алгебраїчні перетворення і самостійно «відкрила» геометричну теорему. У чотири з половиною роки Соня самостійно підійшла до розуміння простих дробів, у шість років подала зображення від'ємних чисел. Вона майже самостійно вивчила операції (усно) з дробами, навчилась розв'язувати найскладніші задачі і самостійно знаходила доведення багатьох геометричних теорем.

Далі вчитель вказав на великі можливості, які створено в нашій країні для виявлення і розвитку здібностей підростаючого покоління. «Можливо,— підсумував учитель,— що в дореволюційній Росії, де трудящим були закриті всі двері в науку, і міг трапитися випадок, про який розповідає легенда. А якби той кравець жив у нашій країні, хто знає, можливо, він став би великим математиком.

На такі бесіди не слід жаліти часу, оскільки вони мають велике виховне значення.

У процесі підготовки до семінару учні можуть звертатися за допомогою і порадами до вчителя. Та й сам учитель на уроках і в позаурочний час, на консультаціях і під час роботи математичного гуртка слідкує за підготовкою учнів до семінарських занять, допомагає їм і контролює їх роботу.

Треба зазначити, що тепер учні, намагаючись глибше вивчити матеріал і найкраще підготуватися до семінару, самі звертаються до вчителя за консультацією. Бажання одержати консультацію виникає разом з появою інтересу і любові до математики, а інтерес і любов до предмета з'являються тільки тоді, коли учень починає усвідомлювати, розуміти, самостійно розбиратися у питаннях теорії і застосуванні її на практиці.

Багаторічна практика показує, що консультації, які практикуються в школі, найчастіше проводилися для

відстаючих учнів, хоч відомо, що такі учні або не розуміли математики, або втратили віру в свої здібності, а тому не мали найменшого бажання відвідувати консультації.

В умовах підвищення рівня знань учнів роль і призначення консультацій в середній школі набуває іншого значення. При новій формі організації навчання основне значення має урок, а індивідуалізація навчання дає змогу організувати навчальний процесс так, щоб кожний учень був зайнятий виконанням посильної для нього роботи. При такій методиці навчання немає потреби проводити консультації у тому розумінні, в якому їх проводили раніше. Якщо раніше консультації призначалися тільки для відстаючих, то тепер консультації проводять, як правило, для добре підготовлених учнів і не з метою усунення прогалин у знаннях, як це було раніше, а для поглиблення знань, з метою підготовки до виступу на уроці-семінарі, розв'язання складних задач, аналізу і засвоєння матеріалу з додаткової літератури та ін. Таким чином, поряд з уроками, консультації набувають великого значення в підготовці учнів до семінарських і взагалі до навчальних занять.

Матеріалами семінарських занять широко користуються в роботі математичного гуртка. Складаючи план роботи гуртка, вчителі включають у нього ряд питань з планів семінарських занять. Учнівські доповіді, реферати, оригінальні доведення теорем і виведення формул, складені задачі і їх розв'язання, історичні матеріали, різноманітні відомості з галузі сучасної науки і техніки та багато інших питань, які розглядають на семінарських заняттях, широко використовують в роботі шкільного математичного гуртка.

На семінарських заняттях вчителі не тільки виявляють, а й готують нових членів математичного гуртка. Ці заняття є для учнів ніби перехідним містком у математичний гурток.

Часто на семінарах бувають творчі дискусії, невимушений обмін думками, оригінальні виклади, цікаві повідомлення, взяті з додаткової літератури, і багато іншого, що особливо захоплює учнів. Клас на таких заняттях перетворюється в маленьку творчу школу юних математиків. Таким чином, семінари значною мірою сприяють підвищенню ефективності позакласної роботи з математики.

Під час підготовки до тематичного семінару вчитель глибоко і всебічно аналізує відповідну тему або розділ за

підручником, встановлює логічні взаємозв'язки цієї теми з іншими темами програми, аналізує відповідні задачі, добирає потрібну додаткову літературу, складає перелік запитань для роботи учнів з додатковою літературою, переглядає програми і підручники з інших предметів (фізики, хімії, креслення, астрономії, виробничого навчання) і визначає можливість зв'язку з цими предметами, готує з учнями наочні посібники для даної теми, планує екскурсії тощо.

Організація уроків-семінарів вимагає від учителя високої теоретичної підготовки, систематичного поглиблення і розширення своїх знань, творчого підходу до організації уроку.

Матеріал до семінару учитель збирає задовго до складання календарних і тематично-поурочних планів. Без наявності такого матеріалу практично неможливо розробити тематично-поурочні плани семінарів. Збирають матеріал також учні (найчастіше під час навчально-виробничої практики та екскурсій). Учні разом з учителем систематично слідкують за періодичною літературою і поповнюють свою бібліотечку книгами і журналами, які рекомендує вчитель.

Для добору і систематизації навчального матеріалу до семінарських занять учитель веде картотеку, в якій матеріал розподіляється за окремими семінарськими темами.

Найбільш підготовленим учням пропонують складніші задачі з різних збірників конкурсних задач, а також доручають складати і доводити теореми, готувати доповіді і реферати, конструювати оригінальні моделі до теорем і задач тощо.

На семінарах учні виступають за власним бажанням. Відповіді при потребі доповнюють, а помилки виправляють. Досвід показує, що запитання учням найкраще ставити в порядку викладу матеріалу за підручником.

Кількість семінарських занять учитель встановлює залежно від характеру вивчуваних тем і розділів. Складаючи календарні і тематично-поурочні плани на півріччя або на рік, учителі розробляють систему семінарських занять, куди входять і тематичні семінари (після вивчення певних тем), і курсові (у кінці навчального року). Наприклад, у IX класі наприкінці навчального року проводять два заключні уроки-семінари з геометрії (здвоєні). На цих уроках

систематизують і узагальнюють матеріал з курсу планіметрії. Тут розглядають основні геометричні поняття (фігура, тіло, поверхня, лінія, точка), означення, аксіома, теорема. Аксіоми, якими користуються в курсі планіметрії. Основні теореми за такими питаннями: рівність і подібність трикутників, перпендикулярність і паралельність прямих, про чотирикутники, метричні співвідношення в трикутнику і крузі, вимірювання відрізків, кутів і площ різних фігур, розв'язання відповідних задач.

На уроках-семінарах з'ясовують усі ті питання, які лишилися для учнів незрозумілими у процесі вивчення матеріалу.

Семінарські заняття проводять різними методами, що залежить від змісту та обсягу матеріалу, який виносять на семінар, а також від теоретичної підготовки вчителя, рівня знань учнів, характеру додаткової літератури, яку опрацьовують учні, тощо.

Для активізації пізнавальної діяльності учнів у процесі навчання, розвитку в них навичок самостійної роботи значне місце на семінарських заняттях відводять складанню планів за пройденим матеріалом, доведенню теорем і розв'язанню задач, написанню класних і домашніх математичних творів на вивчену тему і її практичне застосування, організації практичних робіт по перевірці теоретичних положень, складанню доповідей і рефератів з окремих питань, узагальненню питань, що виникають у процесі навчально-виробничої практики, під час екскурсій, тощо.

Як під час підготовки до семінару, так і в процесі самого уроку-семінару всі ці форми роботи найчастіше поєднуються між собою. На семінарах і особливо під час підготовки до них серйозну увагу приділяють роботі за підручником і рекомендованою літературою. Наприклад, учням пропонують узагальнити набуті знання з певної теми за підручником і рекомендованою літературою. Цю роботу можна виконати по-різному. Так, учитель Кремгесівської школи № 2 В. Г. Коваленко на семінарі з теми «Нерівності» запропонував запитання, відповіді на які шукають у підручнику самі учні.

Щоб правильно відповісти на поставлені запитання, учням треба уважно проаналізувати значну частину теорем, формул, означень і практичних вправ. Якщо пройдений матеріал учні засвоїли грунтовно, то привести його в певну систему можна без особливих труднощів. Учні швидко зна-

ходять за підручником потрібні відомості і використовують їх для узагальнень і висновків. А ті учні, які недостатньо засвоїли матеріал, під керівництвом учителя і при допомозі учнів, які успішно справилися з завданням, вчаться самостійно працювати над підручником, систематизувати і узагальнювати свої знання.

Учитель Г. Й. Пашковський (Помошнянська школа № 2) після вивчення теми «Комплексні числа» провів семінар у формі письмової роботи. Користуючись підручниками А. П. Кисельова або А. Н. Барсукова «Алгебра», та книгою В. Н. Молодшого «Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века» (розділ VII), (М., Учпедгиз, 1963), яку рекомендував учитель на початку вивчення цієї теми, а також записами в зошитах, учням треба було відповісти на такі запитання:

1. Числова пряма. Дійсні числа. Абсолютна величина дійсного числа і її основні властивості (А. П. Кисельов, Алгебра, ч. I; А. Н. Барсуков, Алгебра).

2. Абсолютна величина комплексного числа (використати обидві форми комплексного числа: алгебраїчну і тригонометричну).

3. Показати, що переставні, сполучні і розподільні закони зберігаються і в множині комплексних чисел.

4. Геометричне зображення абсолютної величини дійсної та уявної частин.

5. Чи можна порівнювати ці числа за величиною?

6. Чому дорівнює модуль і аргументи чисел — 2; $3i$; $\sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$.

7. Що відповідає поняттю «аргумент» для множини дійсних чисел?

8. Якщо один корінь квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами комплексний, то який другий?

9. Областю зміни дійсного аргументу x є відрізок дійсної прямої. Якою буде область зміни комплексного аргументу $x + iy$?

10. Чи можливе дальше розширення числової області? (Зробити висновок, розглянувши розв'язок алгебраїчного рівняння; див.: А. П. Кисельов, ч. II, § 145).

11. Чи можуть бути комплексними всі корені алгебраїчного рівняння непарного степеня з дійсними коефіцієнтами (див.: А. П. Кисельов, ч. II, § 145).

12. Чи є щось містичне в уявних числах?

Протягом двох годин учні повинні були коротко

написати відповіді на ці запитання. Така самостійна робота активізує весь клас, сприяє розвиткові уміння самостійно знаходити головне в темі, узагальнювати і робити висновки.

Якщо учні звертаються до рекомендованої літератури, ступінь їх самостійності і пізнавальної активності на уроках і семінарах значно зростає.

На семінарах практикують і невеликі (10—15 *хв*) самостійні письмові роботи, на яких учні складають план вивченого матеріалу. Роботи вчитель перевіряє вдома.

Значне місце на семінарах займають учнівські доповіді і реферати. Характер їх може бути різний: одні можуть містити в собі тільки фактичний матеріал, другі — висвітлювати окремі питання теми в історичному плані, треті — опис і рисунки оригінальних наочних посібників, четверті — найбільш вдале розв'язання задач, п'яті — самостійно складені задачі на місцевому матеріалі, шості — практичне застосування вивченого матеріалу, сьомі — самостійно складені теореми та їх доведення або оригінальні доведення математичних тверджень.

Готуючи доповіді і реферати, учні користуються стабільними підручниками, а також звертаються за порадами до вчителя.

Багато вчителів перед семінарами практикують домашні твори. Так, наприклад, учителі Сутинської середньої школи Мар'їногорського району Мінської області А. С. Рогова і Н. Я. Фицуро перед семінаром запропонували дев'ятикласникам на тему «Розв'язання і дослідження рівнянь першого степеня з одним невідомим» написати твір: «Що відомо мені про рівняння першого степеня з одним невідомим» за таким планом:

1. Що називається рівнянням першого степеня з одним невідомим.
2. Загальний вигляд такого рівняння.
3. Розв'язання рівнянь, корінь рівняння, перевірка розв'язку рівняння, дробові рівняння, цілі рівняння.
4. Рівносильні рівняння.
5. Властивості рівнянь.
6. Що нового ми дізналися про рівняння в IX класі?
7. Дослідження рівнянь.
8. Графічне тлумачення розв'язків рівнянь.
9. Застосування рівнянь на практиці.
10. Історичні відомості про рівняння.

В одних випадках учитель обмежується тільки перевіркою підготовленого твору, доповіді або реферата, в інших — потрібна попередня консультація, яка б спрямовувала думку учня по правильному шляху.

Залежно від характеру семінарської теми структура уроку-семінару може бути найрізноманітнішою. На одних уроках частину часу відводять на самостійне відновлення, систематизацію і узагальнення знань, після чого використовують інші форми організації навчального процесу; на других — всебічній систематизації і узагальненню знань передує самостійна робота над підручником чи рекомендованою літературою з висновками самих учнів або вчителя; на третіх — практикують доповіді і реферати, після чого переходять до узагальнень.

У кінці уроку-семінару підводять підсумки, коротко аналізують відповіді учнів, оцінюють їх знання, узагальнюють і ще раз систематизують вивчений матеріал, вказують на ті питання теорії і практики, які ще недостатньо засвоєні учнями, і пропонують завдання додому.

Складаючи план семінару, залежно від характеру теми вчитель передбачає і можливі зв'язки з іншими предметами.

Міжпредметні зв'язки на семінарських заняттях набирають різних форм, а саме:

а) ілюстрація наочних посібників, у тому числі й сконструйованих учнями;

б) розв'язання задач, складених за матеріалами навчально-виробничої практики та екскурсій на місцеві підприємства;

в) розв'язання задач практичного змісту, запропонованих учителем;

г) висвітлення досягнень математичної науки і застосування її в промисловості і сільському господарстві;

д) розкриття питань історії математики в обсязі вивченої теми, розповіді спеціалістів виробництва, запрошених на семінар, про застосування математики.

Надаючи урокам цього типу великого значення, не можна, звичайно, стверджувати, що все залежить тільки від семінарів, що тільки вони розв'язують проблему успішності в старших класах. Проте досвід передових учителів і результати експериментальної роботи показують, що семінари разом з іншими типами уроків, розроблених за новою системою, сприяють досягненню значних успіхів у навчально-виховній роботі з математики.

Приклади уроків-семінарів, які проведено в окремих школах Кіровоградської області

Приклад 1. *Урок-семінар з геометрії* в X класі школи № 2 м. Олександрії (учитель Р. І. Львівський).

Тема уроку. Двогранні і многогранні кути.

Мета уроку. Систематизація і узагальнення знань з вивченої теми. Аналіз прикладів практичного застосування властивостей геометричних образів.

Обладнання

1. Моделі двогранних кутів: прямих, суміжних і вертикальних (4 моделі).
2. Моделі тригранних і многогранних кутів (2 моделі).
3. Таблиця використання властивостей двогранних і многогранних кутів у практиці електромеханічного виробництва і в побуті (1 модель).
4. Модель бісекторних площин двогранних кутів (1 модель).
5. Епідіаскоп і діапозитиви до виступу: паралель між кутами в планіметрії, стереометрії і тригонометрії.
6. Моделі до виступу: взаємне положення трьох площин (3 моделі).
7. Переносна дошка з рисунком для доведення теореми.
8. Динамічні моделі правильної трикутної піраміди і правильної трикутної призми з рухомим перерізом (2 моделі).
9. Плакат до задачі на знаходження площі даху (1 модель).
10. Указка, кольорова крейда.

Питання до семінару (питання було оголошено учням за два тижні. На питання, які не позначено зірочками, відповіді готували всі учні, а на решту — за вибором учнів):

1. Означення двогранного кута. Його елементи, позначення, запис. Види двогранних кутів.
2. Лінійний кут двогранного кута. Побудова лінійних кутів двогранних кутів у призмі та піраміді.
3. Двогранні і многогранні кути на виробництві і в побуті.

4*. Бісекторна площина і її властивості.

5*. Паралель між кутами в планіметрії і тригонометрії і двогранними кутами.

6*. Перпендикулярні площини. Нові теореми.

7. Взаємне положення трьох площин.

8*. Теорема про залежність площі перерізу і площі проекції від величини лінійного кута двогранного кута.

9*. Застосування цієї теореми в практичних задачах.

10*. Нові теореми і їх доведення. Оригінальні приклади і задачі

Література: Гангнус Р. В. і Гурвіц Ю. О., Геометрія, ч. II; К., вид-во «Радянська школа», 1936.

Хід уроку

1. Учитель коротко повідомляє мету уроку, розповідає про потребу активної і творчої участі в ньому всього класу, про доповнення, рецензування відповідей, записи тощо.

2. Викликає учня до моделі для відповіді на перше запитання. Водночас інший учень креслить на дошці зображення правильної трикутної піраміди для доведення утворення лінійного кута двогранного кута при основі.

Першому учневі дає додаткове запитання про одиницю вимірювання двогранних кутів. Учні з місця ставлять запитання і роблять зауваження.

3. Учень, використовуючи теорему про три перпендикуляри, доводить, що кут, утворений апофемою піраміди і її проекцією, є лінійний кут двогранного кута при основі.

Учитель пропонує дати оцінку рисунка, зробити зауваження до відповіді.

4. Учень розповідає про зібрані ним спостереження і факти використання властивостей двогранних і многогранних кутів на електромеханічному заводі, в архітектурі, у побуті. Учні роблять свої зауваження.

5. Використовуючи модель, учениця дає означення бісекторної площини як г.м.т., рівновіддалених від граней двогранного кута. Означення і властивість бісекторної площини учні записують у зошити.

6. Учениця проводить паралель між кутами в планіметрії і в тригонометрії і двогранними кутами в стереометрії. Вводиться поняття про двогранний кут, як про шлях, пройдений півплощиною відносно свого початкового положення. Відповідь учениця ілюструє виготовленими нею діапозитивами через епідіаскоп.

7. Учениця доводить нову теорему про пряму, перпендикулярну до лінії перетину двох взаємно перпендикулярних площин. Рисунок до теореми виконано на пересувній дошці заздалегідь.

8. До класу ставлять таке запитання-проблему: всередині двогранного кута взято точку. Чи може вона бути рівновіддаленою від ребра і від граней?

9. Учень розповідає про взаємне положення трьох площин у просторі. Розповідь ілюструє моделями (рис. 25):

а) три рухомі площини на спільному станку;

б) три площини, що перетинаються парами;

в) три площини, що перетинаються в одній точці (тригранний кут).

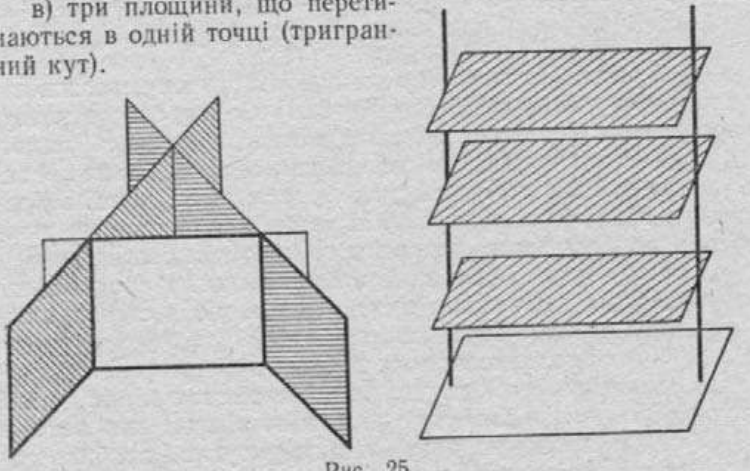


Рис. 25.

Додаткове запитання: Якщо дві площини перпендикулярні до однієї й тієї самої площини, то ці дві площини паралельні. Чи правильне таке твердження?

10. Учень доводить нову теорему, а інші її записують:

$$S_{\text{перерізу}} = \frac{S_{\text{проекції}}}{\cos \alpha},$$

де α — лінійний кут двогранного кута між площиною перерізу й площиною проекції.

Застосування цієї теореми ілюструють на моделях тригранної призми і тригранної піраміди, в яких кут, під яким проходить площина перерізу, може змінюватися в певних межах.

11. Учень ілюструє застосування цієї теореми для обчислення поверхні даху і кута α— його нахилу до горизонту. Додатково підкреслюють значення правильності вибору кута нахилу даху до горизонту і наводять таблицю залежності цього кута від матеріалу.

12. Учень за допомогою динамічної моделі (рис. 26) ілюструє піраміду з одним і двома прямими двогранними кутами при основі і ставить запитання: чи можуть бути у чотирикутної піраміди дві протилежні бічні грані, одночасно перпендикулярні до площини основи? Відповідь ілюструють за допомогою відповідної моделі.

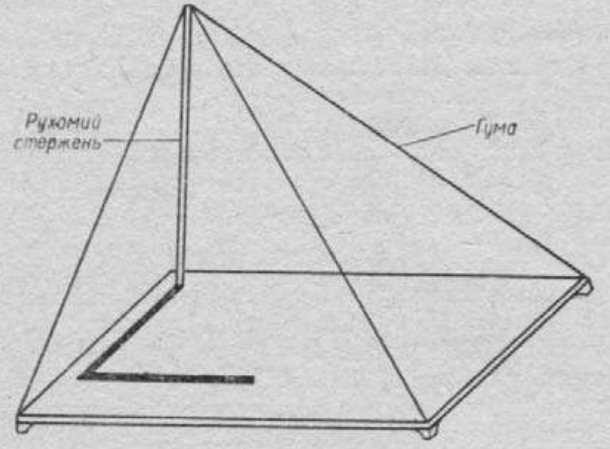


Рис. 26.

13. Учитель підводить підсумки семінару, відзначаючи при цьому кращі відповіді учнів, якість виготовлених ними приладів і таблиць, їх активність, а також повідомляє оцінки учням.

14. Завдання додому. Підготуватися до заліку, користуючись підручником Кисельова, § 38—45 і § 49—51, матеріалами семінару, а також переглянувши розв'язання тих задач, які були розв'язані з цієї теми в класі і вдома.

Приклад 2. *Урок-семінар* (Середня школа № 2 м. Кремгеса, учитель В. Г. Коваленко)

Тема уроку. Двогранні кути, перпендикулярні площини, многогранні кути.

Мета уроку. Систематизувати, поглибити і узагальнити знання учнів з вивченого матеріалу.

Особливість цього семінару полягає в тому, що він передує творчому заліку.

Обладнання

На окремому столі розміщено всі прилади до цих тем. На дошці заготовлені рисунки до задач, запропонованих учителем, і рисунки до задач, запропонованих учнями. Вивішено також таблиці з рисунками, виготовленими учнями до своїх задач.

Хід уроку

Учитель. Які теми ми вивчали і які з теоретичних питань ви хотіли б повторити?

Учень. Ми вивчали двогранні і многогранні кути і перпендикулярні площини. Бажано ще раз повторити доведення другої теореми про перпендикулярні площини і теорему про суму плоских кутів при вершині опуклого многогранного кута.

Один з учнів біля дошки за допомогою моделі доводить теорему: якщо дві площини (P і Q) взаємно перпендикулярні і до однієї з них (Q) проведено перпендикуляр, який має спільну точку (A) з площиною P, то цей перпендикуляр весь лежить у цій площині.

Учитель пропонує тепер іншому учневі біля дошки розв'язати свою задачу (на дошці є готовий рисунок).

Задача на доведення. Якщо плоскі кути тригранного кута прямі і провести бісектриси цих кутів, то кожний з кутів, утворених бісектрисами, дорівнює 60°, тобто $\angle AOC = \angle AOB = \angle BOC = 60°$ (рис. 27).

Доведення. Трикутники OAD, OBD і ADB рівні, звідси $OB = OA = AB$.

Трикутник OAB — рівносторонній, отже, $\angle AOB = 60°$.

Один з учнів пропонує цікаву задачу.

Задача. Якщо з точки, розміщеної на одній із граней двогранного кута (менше 90°), провести перпендикуляр і похилу до ребра, то перпендикуляр до ребра утворить з другою гранню найбільший кут (рис. 28). Для доведення учень використовує обертання і властивість зовнішнього кута трикутника.

Учитель. Хто з вас може практично показати, що сума плоских кутів при вершині опуклого многогранного кута менша за $4d$?

Один з учнів ножицями вирізує на плоскому папері один з лінійних кутів, накреслених біля точки S, після чого утворює опуклий многогранний кут.

Далі вчитель пропонує розглянути на дошці рисунки і

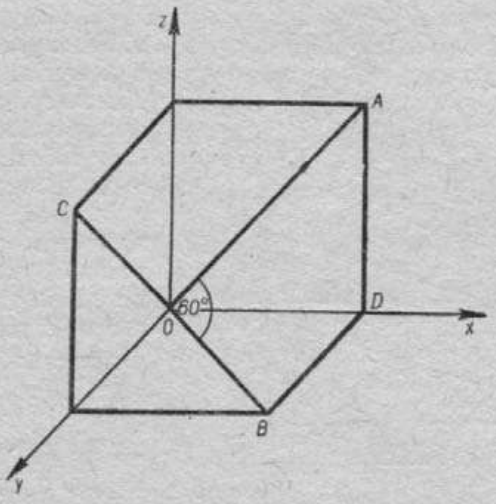


Рис. 27.

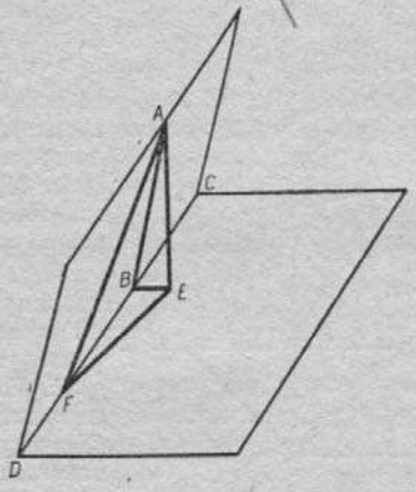


Рис. 28.

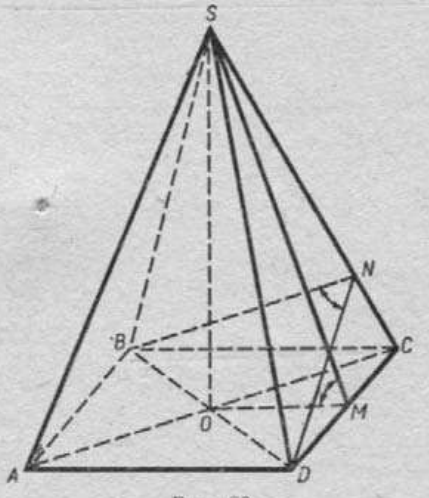


Рис. 29.

розв'язати такі задачі.

1. Побудувати лінійні кути двогранних кутів, утворених бічною гранню з основою і бічними гранями між собою (рис. 29).

2. Обчислити відстань від вершини тригранного кута до точки S, якщо проекції цієї відстані на ребра відповідно дорівнюють 3, 4, $2\sqrt{6}$ (рис. 30).

Учні розв'язують задачі по черзі.

Далі пропонують задачу і виготовлену до неї учнем модель.

З а д а ч а. Кінці відрізка AB лежать на гранях двогранного кута і віддалені від ребра на 2 *см* і $\sqrt{2}$ *см*. Визначити величину двогранного кута (рис. 31), якщо відрізок AB відстоїть від ребра на 1 *см*.

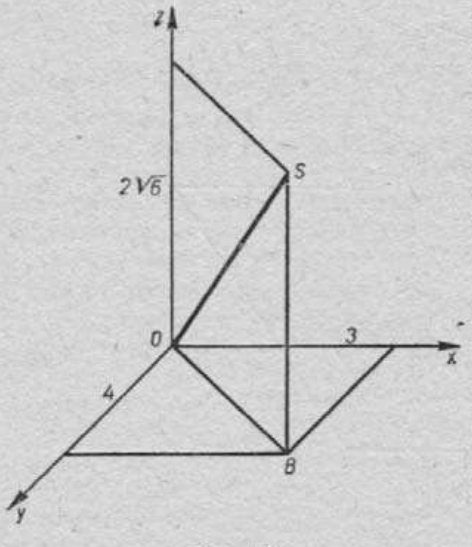


Рис. 30.

Після цього учням пропонують запитання практичного характеру:

1. Як перевірити вертикальність стіни? (Теоретично обгрунтовується § 44).

2. Щоб перевірити вертикальність стовпа, спостереження ве-

дуть з двох пунктів, які не лежать на одній прямій з основою стовпа. Чи збігається вісь стовпа з напрямом виска (обгрунтовується наслідком § 45).

3. На столі є кілька правильних многогранників. Чи можуть біля вершини збігатися 6, 7, 8 і т. д. правильних трикутників, квадратів, п'ятикутників і т. д.? Якщо ні, то чому? (Пояснює один з учнів).

Наприкінці уроку вчитель пропонує таку задачу. Точка *M* лежить всередині двогранного кута, який дорівнює 60°, на відстані 2 *см* і 11 *см* від його граней. Знайти відстань цієї точки від ребра двогранного кута.

Рис. 31.

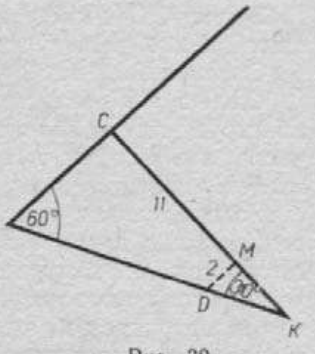


Рис. 32.

Учитель коротко коментує побудову рисунка до цієї задачі (рис. 32), що виконується в площині лінійного кута.

Учнів, які активно брали участь у семінарі, від заліку звільняють.

Решту задач і нових доведень теорем переносять на творчий залік.

Приклад 3. *Урок-семінар з теми «Комплексні числа»* (Середня школа № 2 м. Олександрії, вчитель Р. І. Львівський)

План семінару

1. Від натурального числа до комплексного.
2. Історична справка.
3. Мета запровадження комплексного числа.
4. Геометрична інтерпретація комплексного числа.
5. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

6. Добування квадратного кореня з комплексних чисел.
7. Тригонометрична форма комплексного числа.
8. Формула Муавра.
9. Застосування комплексних чисел до розв'язування задач у механіці і електротехніці.
10. Висновки.

Література

Бронштейн С. С., Методика алгебри, К., вид-во «Радянська школа», 1939.
Енциклопедія елементарної математики, М., ГИТТЛ.
Д. К. Фадєєв і І. С. Сомінський, Алгебра, К., вид-во «Радянська школа», 1955.
Збірник, З досвіду викладання математики в середній школі, К., вид.-во «Радянська школа», 1954
Стаття в БСЭ, т. 22, стор. 297.

Один з учнів виготовив оригінальну таблицю, яка демонструє, що комплексне число найширше представляє число, яке включає в себе, як окремі випадки, усі раніше вивчені числа.

Розповідаючи про історію відкриття комплексних чисел, один з учнів наводив приклади з мемуарної і художньої літератури, демонстрував портрети Ейлера і Гаусса. Інші учні розповіли про мету запровадження комплексних чисел, про геометричне зображення їх і практичне застосування, підкреслили, що кожний новий крок у розвитку поняття числа диктувався потребами практики, зокрема вимогами здійсненності обернених дій і розв'язування рівнянь. Були наведені зразки задач.

Приклад 4. *Урок-семінар з підтеми «Об'єм паралелепіпеда і призми»* (Помошнянська середня школа № 2, учитель Г. Й. Пашковський).

План уроку

1. Об'єм. Основні положення про об'єми.
2. Об'єм прямокутного паралелепіпеда.
3. Лема про рівновеликість прямої і похилої призм.
4. Об'єм прямого паралелепіпеда.
5. Об'єм похилого паралелепіпеда.
6. Об'єм трикутної призми.
7. Об'єм многокутної призми.
8. Чи існують призми, в яких бічне ребро перпендикулярне тільки до однієї із сторін основи?

9. Чи є паралелепіпеди, у яких тільки дві грані — прямокутники?

10. За даними на рисунку розмірами (у міліметрах) визначити вагу деталі, якщо питома вага матеріалу, з якого її виготовлено, $p\ \frac{кГ}{см^2}$ (рис. 33).

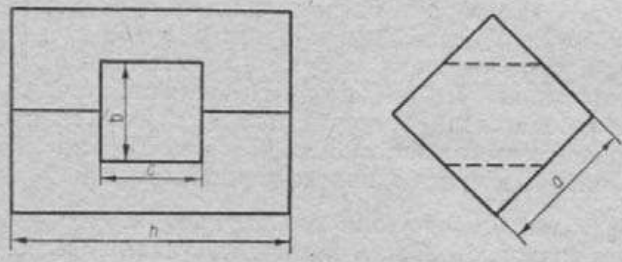


Рис. 33.

11. Визначити місткість повітки прямокутної форми з двосхилим дахом і прямим кутом між кроквами, якщо довжина повітки 10 *м*, ширина 4 *м*, висота стін 3 *м* (подати кілька способів обчислення).

Отже, тематика семінару містить завдання трьох типів. Пунктами 1—7 передбачено повторення вузлових питань підтеми. Відповідаючи на них, учні не наводять повного доведення, а тільки повідомляють його план, виділяючи при цьому окремі найважчі місця. Наприклад, розглядаючи теорему про об'єм трикутної призми, учень формулює теорему, демонструє виконаний ним рисунок і подає план доведення:

1. Добудовуємо призму до паралелепіпеда.
2. Проводимо в паралелепіпеді перпендикулярний переріз. Визначаємо його форму.
3. Доводимо рівність прямих призм, до яких рівновелика кожна з двох похилих призм, що утворюють паралелепіпед.
4. Доводимо рівновеликість цих похилих призм.
5. Виводимо формулу об'єму трикутної призми.

Потім учень вказує, що при доведенні треба використати такі теореми стереометрії:

1. Про лінії перетину двох паралельних площин третьою.
2. Про пряму призму, яка є рівновеликою цій похилій.
3. Про об'єм паралелепіпеда.

Якщо доведення будь-якої теореми взяте не з підручника, то учні наводять його повністю.

Запитання 8—9 вимагають від учнів, по-перше, усвідомлення того, що доведення існування деякої геометричної фігури дає можливість її побудови і, по-друге, вміння пояснити цю побудову.

Задачі, які сформульовано в пунктах 10—11, мають практичний зміст. У першій задачі (пункт 10) треба вміти прочитати рисунок, виконаний в ортогональних проекціях (задачу взято з книги Я. Л. Каплана «Питання практики у викладанні математики»). У другій задачі (пункт 11), яка не є складною за своїм змістом, цікаво порівняти різні варіанти розв'язань і вибрати з них найраціональніший.

Приклад. 5. *Урок-семінар на тему «Куля» — 2 год.* (Середня школа № 27 м. Кіровограда, учитель М. С. Пахманов).

План уроку

1. Доведення одним з учнів на дошці леми про бічну поверхню конуса, зрізаного конуса і циліндра. Решта учнів виконує самостійну роботу:

а) Заповнити таку таблицю, вміщену на переносній дошці:

Куля та її частини	S	V
Куля		
Кульовий сектор		
Кульовий сегмент		
Кульовий пояс		

б) Вивести формулу для обчислення об'єму кулі, коли відомо: а) її поверхня; б) об'єм кульового сегмента; в) об'єм кульового шару.

2. Усне розв'язування вправ:

а) Обертанням яких геометричних фігур утворилися тіла, що мають таку форму, як зображено на плакаті (рис. 34)?

б) Які тіла утворилися від обертання фігур, зображених на рис. 35? (Учень, який відповідав на це запитання, повинен був також знайти це тіло серед набору моделей, які були на уроці).

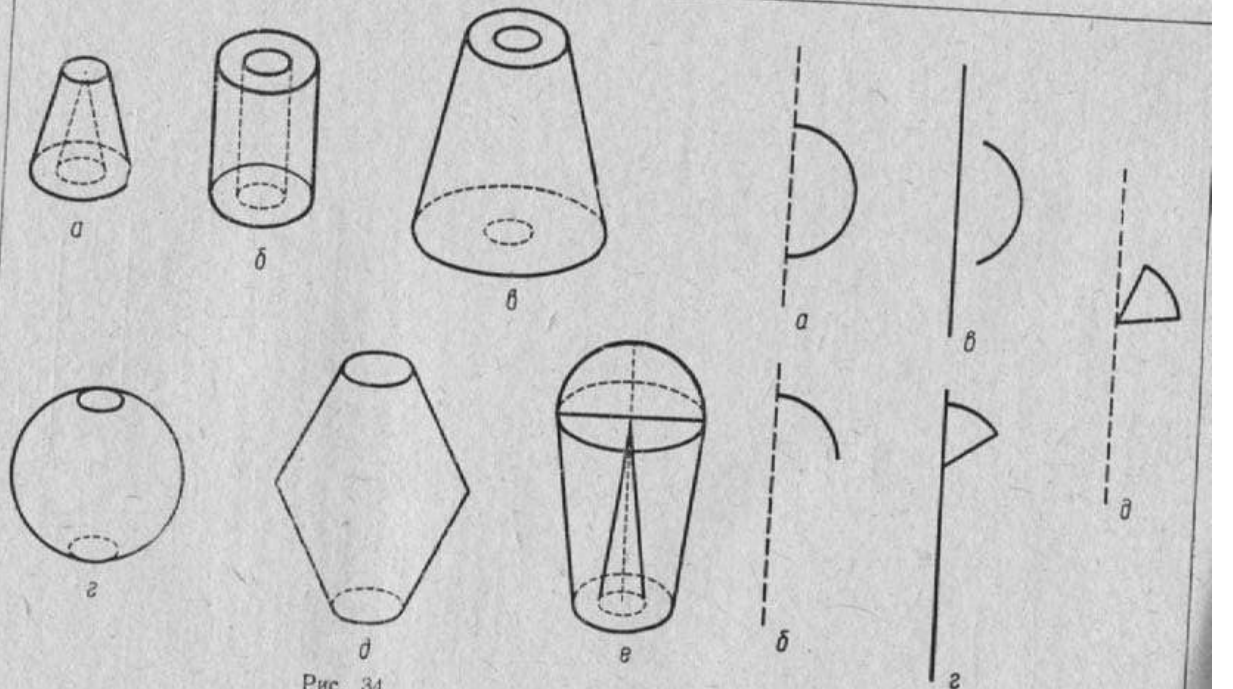


Рис. 34.

Рис. 35.

в) Чи можна лему про об'єм тіла, утвореного обертанням трикутника, вивчати після вивчення об'єму кулі та її частин? (Відповідь повинна бути обгрунтована).

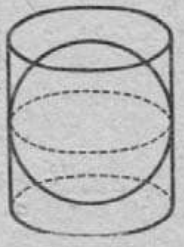


Рис. 36.

Учні відповідають за бажанням або за викликом.

Клас слідкує за відповідями, доповнюючи і виправляючи їх.

3. Розв'язування задач на доведення за готовими рисунками:

а) Довести, що коли кулю вписано в циліндр, то $S_{\text{біч. цил}} = S_{\text{кулі}}$ (рис. 36).

б) Довести, що $V_{\text{цил}} = V_{\text{кон}} + V_{\text{кулі}}$, якщо діаметри основ циліндра і конуса та їх висоти дорівнюють діаметру кулі (задача Архімеда) (рис. 37).

Рис. 37.

в) На рис. 38 подано переріз тіла. Довести, що $V_{\text{цил}} = \sqrt{V_{\text{кулі}} \cdot V_{\text{кон}}}$.

Перші дві задачі було розв'язано усно. Останню учень розв'язав біля дошки, зробивши такі пояснення: «Тіло, переріз якого зображено на рисунку, є комбінація конуса, циліндра і кулі, вписаної в циліндр і конус. Висота конуса дорівнює $3R$, тому що центр вписаного в правильний трикутник кола поділяє його висоту у відношенні $1:2$. Радіус основи конуса дорівнює половині сторони описаного трикутника, тобто $R\sqrt{3}$. Висота циліндра дорівнює $2R$, тому що куля вписана в циліндр. Отже,

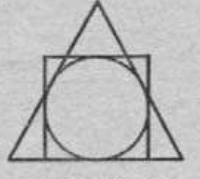


Рис. 38.

$$\pi R^2 \cdot 2R = \sqrt{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{3}\pi (R\sqrt{3})^2 \cdot 3R} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \pi R^2 \cdot 3R} = 2\pi R^3.$$

4. Розв'язання задач з практичним змістом.

а) Як зміниться об'єм кулі, якщо її радіус збільшити в 2; 1,5 раза або на 50%?

б) Об'єм кулі треба зменшити у 5; 3 рази. Як зміниться її радіус?

в) Радіус Місяця приблизно в три рази менший за радіус Землі. Яка поверхня Місяця, якщо поверхня Землі близько 510 000 000 *кв. км*?

г) Які яблука вигідніше купувати: ті, що в перерізі мають 60 *мм* і коштують по 2 коп. за штуку, чи ті, переріз яких дорівнює 80 *мм* і коштують по 4 коп. за штуку? Відповідь обгрунтувати розрахунками.

5. Приклади на практичне застосування математики, які були наведені на семінарі самими учнями.

Перший учень навів приклад на практичне визначення площі поверхні кулі без застосування формул. Узявши кулю, яка складається з двох півкуль, він встромив у полюс однієї з них булавку і виток за витком почав обмотувати півкулю шнуром доти, доки шнур не покрив зовнішню частину поверхні цієї півкулі. Встромивши в центр основи другої півкулі булавку, учень намотував витки по поверхні основи доти, доки шнур не покрив її. Порівнявши довжину першого і другого шнурів, усі побачили, що перший шнур удвоє довший від другого. Так було зроблено висновок про те, що площа поверхні кулі у чотири рази більша від площі її великого круга.

Другий учень повідомив, що конструкторам космічних кораблів треба було знайти таку форму космічних апаратів, на одиницю площі поверхні яких падав би найменший потік радіації. Закони геометрії допомогли розв'язати і це питання. Як відомо, у різних найпростіших геометричних тіл з однаковим об'ємом величина поверхні різна. Найменшу поверхню відносно об'єму має куля. Ось чому найдоцільніше будувати космічний корабель у формі кулі, тим більше, що, як показали підрахунки, вага кульової міжпланетної станції у 1,3 раза менша від ваги станції такого самого об'єму, але виготовленої у формі циліндра.

Готуючись до семінару, учні повинні були розв'язати таку задачу, самостійно побудувавши відповідний рисунок:

З а д а ч а. З якої точки земної кулі можна пройти 10 *км* на південь, 10 *км* на схід і 10 *км* на північ, щоб знову потрапити в ту саму точку? Скільки таких точок є на Землі?

Учитель порадив скористатися глобусом.

Примітка. На рис. 39 схематично зображено Південний полюс. Якщо пройти з цієї точки на північ 1,59 *км*, а потім радіусом, що дорівнює 1,59 *км*, описати навколо полюса коло, то це буде паралель довжиною $l = 10$ *км* ($l = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}59 \approx 10$).

Радіусом, що дорівнює 1,59 *км*, опишемо навколо полюса коло. Кожна точка на цьому колі відповідатиме умовам нашої задачі. Візьмемо, наприклад, точку, звідки ми зробимо старт. Пройдемо 10 *км* на південь і потрапимо на нашу першу паралель, тобто на коло з радіусом 1,59 *км*. Пройшовши 10 *км* на схід, ми обійдемо все коло, тому що довжина

Рис. 39.

кола становить 10 *км*. Обійшовши всю довжину кола, потрапимо в точку, куди ми прийшли, подорожуючи на південь з точки нашого старту, а вийшовши з неї на північ, повернемося в точку, з якої розпочали подорож.

Отже, точок, про які йде мова, є незліченна кількість. Їх геометричне місце — паралель, що лежить на відстані 1,59 *км* від полюса.

6. Задачі практичного змісту, складені учнями на матеріалі вивчення виробничих процесів на місцевому заводі.

1) Твердість металу визначають вдавлюванням стальної кульки в цей метал на спеціальних пресах. Залежно від діаметра кульки D, діаметра відбитка d і вдавлюючої сили P твердість металу визначають за формулою

$$H_B = \frac{P}{F}, \qquad (1)$$

де H_B — твердість металу за Брінелем;
P — вдавлююча сила;
F — площа сферичної поверхні відбитка (кульового сегмента), одержаного від вдавлювання кульки.

Приклад. Визначити твердість металу, якщо $P = 3000$ *кГ*, $d = 3{,}0$ *мм* і $D = 10$ *мм* (рис. 40).

Розв'язання. За теоремою про діаметр і хорду, які перетинаються всередині кола, визначаємо висоту сегмента:

$$\frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} = (D - h)\,h;$$

$$\frac{d^2}{4} = Dh - h^2;$$

$$4h^2 - 4Dh + d^2 = 0.$$

Отже, $h \approx 0{,}25$ (*мм*).

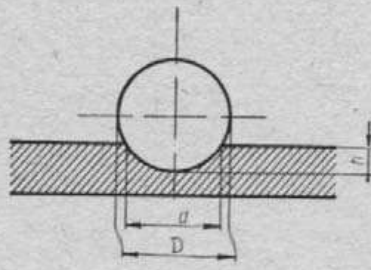


Рис. 40.

Далі визначаємо поверхню відбитка (кульового сегмента), а за формулою (1) знаходимо твердість металу:

$$F = 2\pi Rh \approx 7{,}8; \quad H_B = \frac{3000}{7.8} = 385 \approx 400.$$

(На практиці твердість металу визначають за готовими таблицями. Розв'язавши цю задачу, учні зрозуміли принцип побудови цих таблиць).

2) На сівалку СКГН-6 ставлять чотири чавунні тягарці у формі кульок $D = 40$ *мм*, у кожний тягарець вставлено стальний стержень (діаметр стержня 16 *мм*), який доходить до центра кульки (рис. 41).

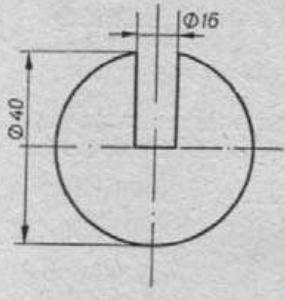


Рис. 41.

Визначити кількість чавуну, який буде витрачено на виготовлення тягарців протягом місяця. Місячний випуск сівалок становить 50 шт., а вихід придатного чавуну дорівнює 71%.

3) Обчислити потрібну кількість стержневої суміші для забезпечення безперебійної роботи бригади комуністичної праці Галини Бардіної, яка виготовляє стержні для виливання деталей до сівалки СКВ-118 у кількості 2000 шт., до сівалки СГЖ-104 у кількості 4800 шт., а до сівалки СУД-112 у кількості 3500 шт., якщо питома вага суміші 1,6.

Розв'язання. Користуючись формулами для обчислення об'ємів циліндра і зрізаного конуса, за рис. 42 визначаємо об'єм кожного стержня (першого — 0,11 *дм*³, другого — 0,048 *дм*³ і третього — 0,111 *дм*³). Після цього

обчислюємо об'єм суміші, потрібної для виготовлення стержнів до сівалок кожної марки окремо ($V_1 \approx 220$ *дм*³; $V_2 \approx 230$ *дм*³, $V_3 \approx 389$ *дм*³), і, нарешті, визначаємо вагу всієї стержневої суміші ($P = V \cdot d \approx 0{,}839 \cdot 1{,}6 \approx 1{,}342$ *т*).

(Наведені задачі взято з учнівських рефератів, написаних до семінару з вивчуваної теми).

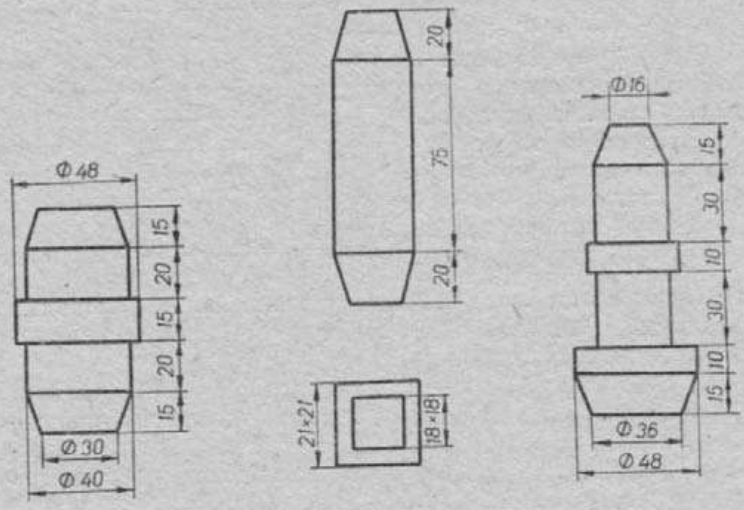


Рис. 42

7. Оригінальне доведення теореми і виведення формул.

а) Формула об'єму кульового сегмента. Знаючи, що

$$v_{\text{кульового сегм}} = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H\right),$$

учень вивів таку формулу:

$$v = \frac{\pi H}{6} (3r^2 + H^2).$$

Доцільність практичного застосування цієї формули очевидна. Користуючись нею, ми, не знаючи величини радіуса кулі, можемо обчислити об'єм кульового сегмента тільки за радіусом його основи і висотою.

б) Інший учень запропонував своє доведення теореми про площину, дотичну до кулі, використовуючи теорему про два перпендикуляри.

в) Учень К. вивів формулу об'єму кулі за допомогою границі суми об'ємів конусів, які мають спільну вершину в

центрі кулі, а учениця А. вказала на можливість виведення цієї самої формули за допомогою границі суми об'ємів пірамід, які мають спільну вершину в центрі кулі.

г) Окремі учні запропонували різні способи виведення формул поверхні і об'єму кулі з формул поверхонь і об'ємів кульового сегмента і кульового шару.

д) Учень В. доповів про універсальну формулу Сімпсона для обчислення об'ємів призми, повної і зрізаної пірамід, циліндра, повного і зрізаного конусів та кулі:

$$V = \frac{H}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3), \qquad (1)$$

де H — висота тіла;
b_1 — площа нижньої основи;
b_2 — площа середнього перерізу;
b_3 — площа верхньої основи.

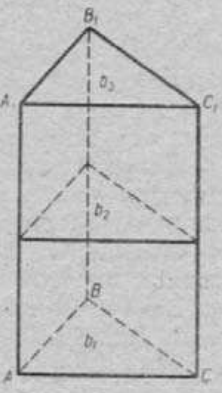


Рис. 43.

А учень Б. показав, як з цієї загальної формули вивести нову формулу для обчислення об'ємів призми, піраміди, зрізаної піраміди, циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі, кульового сегмента.

Ось як він з формули (1) вивів формулу об'єму призми. У прямій призмі (рис. 43) $b_1 = b_2 = b_3$, тому

$$V = \frac{H}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = \frac{H}{6} \cdot 6b_1 = Hb_1.$$

Формулу для об'єму конуса виведено так (рис. 44). У прямому круговому конусі $b_3 = 0$, а $b_2 = \frac{b_1}{4}$. Підставляючи ці значення площ у формулу (1), маємо:

$$V_{\text{кон}} = \frac{H}{6}\left(b_1 + 4 \cdot \frac{b_1}{4} + 0\right) = \frac{H}{3} \cdot b_1.$$

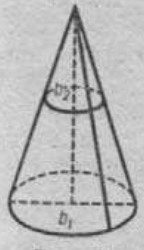


Рис. 44.

Виведення інших формул для обчислення об'ємів піраміди, зрізаної піраміди, циліндра, зрізаного конуса, кулі і кульового сегмента було запропоновано учням як домашнє завдання.

Учениця П. показала, як можна вивести формулу для об'єму кулі, користуючись принципом Кавальєрі.

Крім того, учні згадали цікаві історичні факти, що стосуються теми «Куля».

Наприкінці уроку було підведено підсумки роботи класу з теми «Куля», а також зроблено короткий аналіз розглянутих на семінарі запитань і відповідей учнів, повідомлено оцінки тим учням, які виявили на семінарі глибокі знання, уміння і навички.

Приклад 6. *Урок-семінар з теми «Границі» — 2 год.* (Маловисківська середня школа № 4, учитель М. А. Бровченко)

На початку вчитель підкреслив мету семінару і місце цієї теми в сучасній математиці і на практиці.

Далі клас приступає до розгляду питань, передбачених планом семінару. Учні виступають за бажанням або за викликом учителя.

Учениця С. на прикладах з життя, природи, техніки розповідає про сталі і змінні величини.

Вона наводить такі приклади:

1. Нехай щільно закрита колба наповнена певною кількістю газу. Рівняння стану газу $pV = \frac{m}{\mu}Rt$. Підігріватимемо газ (розширення колби до уваги не братимемо). У цьому ізохоричному процесі сталими величинами будуть об'єм газу, число молекул газу, його маса, а змінними величинами — температура газу і його тиск на стінки посудини (процес, що підлягає закону Шарля).

2. Відстань від Землі до Марса є величина змінна, тому що вона то збільшується, то зменшується.

3. Автобус рухається між двома автобусними станціями. У цьому випадку сталими величинами є склад обслуговуючого персоналу, вага автобуса тощо. Змінними величинами є кількість пального в баках, запас води, час і відстань від пункту відправлення.

Після цих прикладів учениця дає означення сталої і змінної величин, зазначаючи, що сталі величини умовилися розглядати як змінні, що в умові цієї задачі набувають одного й того самого числового значення.

Щоб проілюструвати подвоєння сторін правильного вписаного многокутника, учениця виготовила цікаву модель. На фанері розміром 0,6 *м* × 0,6 *м* наклеєно аркуш цупкого паперу, на якому накреслено коло з вписаним у нього правильним трикутником. У вершини цього трикутника забито гвіздочки, на які натягнуто гумові стрічки. Гвіздочки забито також у вершини правильного вписаного в це

коло шестикутника, дванадцятикутника, решту на папір не нанесено, але в разі потреби їх можна зобразити за допомогою запасних стрічок.

Розглядаючи процес подвоєння числа сторін правильного вписаного трикутника (використовується модель), учениця підкреслює особливу роль у математиці змінної величини, значення якої можна занумерувати натуральними числами. Сторону трикутника a можна занумерувати числом 1, а сторону шестикутника — числом 2, сторону дванадцятикутника — числом 3 і т. д. до нескінченності: a_1, a_2, a_3, ...

Учениця дає означення числової послідовності: «Значення змінної величини, розташовані в певному, позначеному номерами порядку, називаються послідовністю».

Після цього наводить приклади числових послідовностей, розповідає про запис і позначення числових послідовностей.

Аналізують задачу: «Вершина трикутника переміщується вгору по висоті трикутника, необмежено віддаляючись від основи. Як зміниться при цьому кожна з його сторін, кожний з його кутів, середня лінія, висота, периметр, площа, сума внутрішніх кутів? Яка з цих величин є стала, а які необмежено зростатимуть? Які є обмеженими, а які будуть монотонними?».

Учениця Р. до цієї задачі виготовила таблицю. З'ясовують питання про зростаючу, спадну і монотонну змінну величини. Кути при основі трикутника в цій задачі, говорить учениця, є змінні величини, які в цьому процесі монотонно зростають, залишаючись меншими від кута 90°.

Наводять ще приклад. Конструкція кожного літака розрахована на певну висоту підняття над поверхнею землі. Коли уявити, що літак піднімається в повітрі, весь час набираючи висоту, то висота підняття його буде величиною змінною, монотонно зростаючою і залишатиметься весь час меншою деякої вказаної висоти, наприклад 20 *км*.

Після цього дають означення змінної величини, обмеженої зверху:

«Змінна, яка монотонно зростає, а її значення залишаються меншими деякого сталого числа, називається обмеженою зверху».

Кут при вершині трикутника є величина змінна, яка монотонно спадає, весь час залишаючись більшою за 0°.

Учениця наводить приклад числової послідовності, обмеженої знизу:

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots,$$

і після цього дає відповідну геометричну ілюстрацію.

Формулює означення змінної, обмеженої знизу: «Змінна, яка монотонно спадає, тоді як її значення залишаються більшими від деякого сталого числа, називається обмеженою знизу».

Учень Н. з місця доповнює відповідь учениці. Він дає означення обмеженої змінної, ілюструючи свою відповідь таким прикладом: «Максимальна відстань від Землі до Місяця 406 000 *км*, а мінімальна 356 000 *км*. Отже, відстань від Землі до Місяця є величина змінна, обмежена як знизу, так і зверху. Такі змінні величини називаються обмеженими».

Учень К. розповідає про нескінченно велику величину. Він наводить такий приклад.

У Радянському Союзі в лютому 1963 року було запущено міжпланетну автоматичну станцію у напрямі Марса. Ця станція стала супутником Сонця. Віддаль, яку проходить станція, є змінна величина, зростаюча, необмежена зверху. Для цієї змінної не можна назвати проміжку, якому належать усі її значення. Змінна величина $x_n = -n$, де $n = 1, 2, 3, \ldots$, необмежена знизу. Ці змінні змінюються так, що абсолютна величина кожної з них стає і залишається більшою за будь-яке наперед задане як завгодно велике додатне число. При цьому він підкреслює, що зовсім байдуже, яке числове значення в даний момент має нескінченно велика величина.

Через кілька хвилин після запуску автоматична міжпланетна станція була на порівняно невеликій віддалі від Землі. Але важливо те, що в міру віддалення станція пройде віддаль, більшу за як завгодно велику наперед задану віддаль.

Учениця М. з'ясувала питання про границю змінної величини. Розглянемо, каже вона, змінну $a_n = \frac{n}{n+1}$, де $n = 1, 2, 3, \ldots$ Випишемо числову послідовність $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}$. Це послідовність зростаюча, обмежена зверху числом 1 (рис. 45).

На числовій осі відкладемо точки, які відповідають членам нашої послідовності. На рисунку бачимо, що із збільшенням номера n відповідні точки необмежено наближаються до точки з координатою 1. Із зростанням n відстань на числовій осі між точками, які зображають значення x_n, і точкою, яка зображає число 1, весь час зменшується. Ця відстань дорівнює

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Покажемо, що для всіх досить великих значень номера n абсолютна величина різниці між членами послідовності і одиницею буде меншою від будь-якого наперед заданого

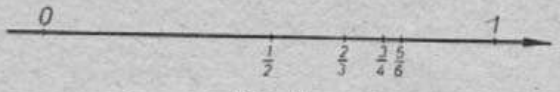


Рис. 45.

додатного числа ε. Нехай $\varepsilon = \frac{1}{100}$, тоді $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100}$ при $n + 1 > 100$, $n = 99$. Це означає, що, починаючи з 100-го члена, абсолютна величина різниці між членами послідовності і одиницею менша від $\frac{1}{100}$. Нехай $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, тоді $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{1000}$ при $n + 1 > 1000$, $n > 999$.

Отже, починаючи з 1000-го члена, абсолютна величина різниці між членами послідовності і одиницею менша від $\frac{1}{1000}$.

Міркуючи так, ми можемо брати число ε все меншим і меншим і завжди, яким би малим не було задане число ε, абсолютна величина різниці між одиницею і членами послідовності $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ буде меншою від ε при всіх достатньо великих значеннях номера n. У таких випадках кажуть, що число 1 є границею змінної $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

Учениця дає означення границі змінної:

«Число A називається границею змінної величини x, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε

можна назвати такий стан процесу, починаючи з якого абсолютна величина різниці $|A - x|$ стає і залишається меншою від цього числа».

Учитель. Чому в означенні границі йдеться про абсолютну величину різниці між числом A і змінною x, а не просто різницю?

Учень. Якщо величина $|A - x|$ мала, то це означає, що значення x дуже близькі до A. Наприклад, якщо $|A - x| < 0{,}0001$, то це означає, що x відрізняється від A менш ніж на 0,0001 (у той або інший бік). Якби було відомо, що тільки сама різниця $A - x$ (а не її абсолютна величина) менша від 0,0001, то звідси не можна було б зробити висновку, що x близьке до A; x може бути більшим від A на будь-яке число, наприклад на 100 000, і все-таки нерівність $A - x < 0{,}0001$ справджуватиметься, оскільки від'ємне число $A - x = -100\,000$ менше від будь-якого додатного числа.

Учитель підкреслює ще раз, що про близькість x до A треба судити не просто з того, що різниця $A - x$ мала, а з того, що абсолютна величина цієї різниці мала.

У той час, коли учениця М. готувалась біля дошки до відповіді, решта учнів розв'язувала таку задачу:

«Довести, що границею величини внутрішнього кута правильного многокутника при необмеженому збільшенні числа його сторін є кут, що дорівнює 180°».

Учениця Б. сформулювала теорему про єдиність границі змінної величини і довела її.

Нехай яка-небудь змінна величина x має границю A. Це означає, що, починаючи з певного стану процесу, виконується нерівність $|x_n - A| < \varepsilon$ (рис. 46).

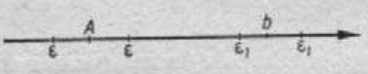


Рис. 46.

Ця нерівність рівнозначна нерівності $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$. А це означає, що на числовій прямій є відрізок довжиною 2ε з центром у точці A, хоч яким малим він би не був, все-таки з певного стану процесу всі значення змінної x_n лежатимуть на цьому відрізку. Коли припустити, що змінна x_n має іншу границю b, то це означало б, що існує на прямій такий відрізок завдовжки $2\varepsilon_1$ з центром у точці b, хоч яким малим він би не був, з певного стану процесу цьому відрізку належатимуть усі значення x_n. Але це неможливо, бо 2ε і $2\varepsilon_1$ можна вибрати достатньо малими і тоді

вони не матимуть спільних точок. (Доведення цієї теореми не передбачено програмою).

Учень П. навів геометричне тлумачення того положення, що послідовність $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ має границю A. Який би не був відрізок числової прямої з центром у точці A, усі члени послідовності починаючи з певного номера, зображатимуться точками цього відрізка; поза ним лежить тільки скінченна кількість точок які зображають члени цієї числової послідовності.

Учениця С. навела інші міркування з приводу цього.

Позначимо точкою M змінну величину x, а точкою A — сталу величину a. Оскільки x є змінна величина і a — стала, то точка M є рухомою, а точка A — нерухомою (рис. 47)

Виберемо довільне ε і відкладемо ε вліво і вправо від A. Ми дістанемо на прямій нерухомий проміжок завдовжки 2ε з центром у нерухомій точці A.

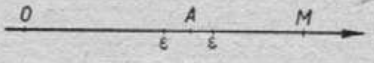


Рис. 47.

Тепер, у міру проходження процесу, точка M переміщатиметься якось по прямій. Але, якщо точка A є границею змінної величини x, то точка M обов'язково потрапить на цей нерухомий проміжок 2ε і залишатиметься так весь час, тому що різниця $x - a$ за абсолютною величиною стане і залишатиметься меншою від 2ε (за означенням границі).

Ця різниця і є відстань рухомої точки M від нерухомої точки A, її границі. Отже, можна вважати, що рухома точка M прямує до нерухомої точки A, як до своєї границі. Інакше кажучи, точка M рухається так, що з часом потрапляє на будь-який заздалегідь вибраний нами малий проміжок, що охоплює A, і залишатиметься там і надалі.

Розв'язування прикладів, записаних на плакаті.

Які з наведених нижче послідовностей мають границі? Чому дорівнює кожна з цих границь?

а) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \ldots, \frac{1}{p}, \ldots,$ де p — просте число.

б) $0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \frac{24}{25}, \ldots, \frac{n^2-1}{n^2}, \ldots;$

в) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots;$

г) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots;$

д) $1, 4, 9, 15, \ldots, n^2, \ldots;$

е) $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \ldots, \frac{1}{n^3}, \ldots.$

Учень К. формулює теорему Вейєрштрасса і, користуючись нею для обгрунтування того факту, що послідовності а), б), в), г) мають границі, знаходить їх. Він звертає увагу на те, що коли послідовність монотонно зростаюча і обмежена зверху або монотонно спадна і обмежена знизу, то з цього випливає, що змінна величина обов'язково має границю. Проте з того, що змінна має границю, зовсім не випливає, що вона монотонна. Є немонотонні величини, які мають границю. Іншими словами, ознака Вейєрштрасса є достатньою, але не необхідною.

Наприклад, змінна $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ не задовольняє ознаки Вейєрштрасса, проте вона має границю, яка дорівнює нулю. Справді:

$$\left|\frac{1+(-1)^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{1+(-1)^n}{n}\right| \leqslant \frac{2}{n} < \varepsilon \text{ при } n > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Учень К. спинився на понятті нескінченно малої величини. Він формулює задачу на доведення.

Користуючись означенням границі, доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{360°}{n}$, де $\frac{360°}{n}$ — центральний кут правильного вписаного многокутника.

Доведення:

$$\left|\frac{360°}{n} - 0\right| = \frac{360°}{n} < \varepsilon \text{ при } n > \frac{360°}{n}.$$

Границя змінної дорівнює нулю.

—Нескінченно малою величиною,— говорить він,— називається така змінна величина, границя якої дорівнює нулю.

Учень підкреслює, що нескінченно мала величина є величина змінна, що випливає з її означення. В означенні йдеться не про величину її, а про характер зміни. Ніяка стала величина не є нескінченно малою. Виняток з усіх чисел становить нуль, який умовно вважають нескінченно малою величиною.

Учень Л. з місця доповнює, що погляди на нескінченно малі величини у математиці змінювалися, але термін залишився старий. Краще б говорити не «нескінченно мала величина», а «нескінченно спадна змінна». Така назва точніше б відбивала суть процесу зміни.

Учень К. навів приклади нескінченно малих величин. Він розповів, що в газеті «Комсомольская правда» розповідалося про те, що під час розвантажування в Антарктиді радянських кораблів, які доставили вантаж для відважних дослідників, знявся сильний шторм. Капітан корабля «Обь» встиг тільки відвести корабель від берегового льодового припою, як величезні льодові гори об'ємом у кілька кубічних кілометрів почали відриватися від берега і падати в океан. Такі льодові гори, або айсберги, плавають в океані і поступово тануть. Об'єм їх — змінна величина, нескінченно мала, хоч в даний момент він виражався великим числом.

Інший приклад. Якщо припустити, що в даний момент космічний корабель з якоїсь іншої планети стартував на Землю, то віддаль його від поверхні Землі тепер хоч і дуже велика, все-таки ця змінна величина є нескінченно мала.

Розв'язування задач, текст яких заздалегідь приготували на плакаті або діапозитивах до епідіаскопа

Кількість сторін вписаного в коло правильного многокутника необмежено подвоюється.

1. Встановити, як зміниться:

а) довжина сторони многокутника (a_n);

б) його апофема (k_n);

в) периметр (P_n);

г) площа (S_n).

2. Знайти формули, які виражають залежно від числа сторін правильного многокутника:

а) число діагоналей;

б) величину внутрішнього кута;

в) величину зовнішнього кута;

г) суму внутрішніх кутів;

д) суму зовнішніх кутів.

Вважаючи, що спочатку в коло був вписаний трикутник, потім шестикутник і т. д., обчислити по три члени послідовностей тих величин, для яких було виведено формули.

Які з цих послідовностей мають границі і чому кожна з них дорівнює?

3. Відповісти на ці самі запитання, якщо правильні многокутники будуть описаними.

Учень М. виявив бажання з'ясувати основні теореми про границі. Він формулює теореми і наводить з додаткової літератури доведення теореми про границю суми двох змінних, які мають границі.

Учитель звертає увагу учнів на те, що ця теорема правильна для скінченної кількості доданків. Якщо кількість доданків нескінченно велика, то теорему застосовувати не можна. Наприклад, кожна сторона правильного вписаного в коло n-кутника при необмеженому зростанні n прямує до нуля, хоч периметр многокутника не тільки не прямує до нуля, а, навпаки, зростає. Границю, до якої прямує периметр, приймають за довжину кола.

Наприкінці уроку вчитель підводить підсумки, аналізує відповіді, повідомляє оцінки тим учням, які виявили глибокі і міцні знання, уміння і навички.

На цьому уроці десять учнів одержали оцінки «5» і один — оцінку «4». Цих учнів звільнено від заліку з даної теми.

В процесі підготовки до семінару було використано таку літературу:

1. Лузин М. М., Дифференциальное исчисление, М., Физматгиз.

2. Журнал «Математика в школе», 1958, № 4.

3. Алгебра, ч. II. Навчальний посібник за редакцією Маркушевича, К., вид-во «Радянська школа».

4. Гельфанд М. Б., Павлович В. С., Уроки з алгебри в IX—X класах, К., вид-во «Радянська школа» та ін.

§ 6. КОНТРОЛЬНО-ЗАЛІКОВІ УРОКИ

Перевірка знань, умінь і навичок учнів є однією з найважливіших ланок навчального процесу. Міцність і глибина знань, умінь і навичок великою мірою залежать від правильної організації контролю за навчальною діяльністю учнів. Коли вчитель раціонально організовує контроль навчальної роботи, кожний із учнів «...бачить наслідки своєї праці, зважує результати своїх зусиль, сміливіше береться за розв'язування нових задач і впевненіше йде до нової ме-

ти» *. Правильна постановка контролю дає змогу вчителеві не тільки об'єктивно визначити і оцінити рівень знань, умінь і навичок учнів, які вони засвоїли раніше, а й своєчасно ліквідувати виявлені прогалини у їх знаннях, зробити правильні висновки щодо результативності застосовуваних методів і способів викладання математики.

Контроль передбачає не тільки важливі дидактичні, а й виховні завдання. Правильна постановка контролю «...мобілізує учнів, дає їм змогу глибше засвоювати знання, ...сприяє виробленню в учнів критичного ставлення до своєї праці, допомагає виховувати свідому дисципліну, силу волі, любов до праці та почуття відповідальності за результати праці» **.

Якщо способи контролю знань учнів недосконалі, то стає недосконалим і малоефективним весь процес навчання, усі його навчальні ланки.

Від правильно організованого обліку знань значною мірою залежить ставлення учнів до навчання, і в цілому успішність їх з математики.

У нашому експериментальному дослідженні в школах Кіровоградщини було поставлено завдання: розробити як доповнення до існуючих форм поточної перевірки знань раціональні прийоми контролю системи знань, умінь і навичок, які відповідали б віковим особливостям учнів, зокрема:

1) прищепити учням навички до систематичної навчальної праці;

2) підвищити ефективність поточного контролю знань;

3) вивільнити час на власне навчання за рахунок раціоналізації процесу контролю знань учнів;

4) посилити раціональними способами контролю процес узагальнення і систематизації матеріалу, що його вивчають учні.

Щоб визначити рівень знань учнів з вивченої теми (розділу) програми, обласний відділ народної освіти і кабінет математики обласного інституту удосконалення кваліфікації учителів обстежили ряд шкіл області. Обстеження мало на меті перевірити знання (усно й письмово), уміння та навички учнів як з матеріалу кількох уроків, так і матеріалу всієї вивченої теми (розділу) програми з математики.

---

* С. В. Иванов, Типы и структура уроков, М., Учпедгиз, 1952, стор. 116.

** В. Оконь, Процесс обучения, М., Учпедгиз, 1962, стор. 168.

Результати перевірки зведено в таку таблицю:

Таблиця

Середні показники засвоєння учнями навчального матеріалу протягом вивчення теми (розділу) програми

Обстежувані класи	Кількість уроків	Всього учнів	Кількість учнів (у %), що дістали позитивну оцінку за знання матеріалу в обсязі						
			1-го уроку	2-х уроків	3-х уроків	4-х уроків	5-ти уроків	6-ти уроків	Всієї теми
IX	56	1624	82	74	39	27	24	22	18
X	38	988	87	76	42	29	27	27	22
XI	42	1134	94	86	44	33	31	30	24

Аналіз цієї таблиці дає змогу встановити певну закономірність: чим далі від початку вивчення теми матеріал, по якому контролювалися знання, тим менше учнів його пам'ятають. В основному, більшість учнів виявила міцні знання матеріалу одного-двох уроків після вивчення нового матеріалу. Дуже різко знижується процент учнів, які можуть відтворити матеріал, вивчений на трьох-шести уроках, і ще менше — з усієї теми.

Під час обстеження було встановлено також багато прикладів, коли учень, який дістав двійку з певної теми, виправляє свою оцінку через деякий час уже за матеріал з іншої теми. Практично виходить, що той матеріал, який учень у свій час не вивчив і за який дістав двійку, так і залишився неперевіреним. Це призводило до збільшення прогалин у знаннях учнів.

Причина такого явища не лише в недосконалості методів навчання, а й у недосконалості способів контролювання знань, які застосовує учитель, як правило, щоб перевірити не систему знань, умінь і навичок учнів, а тільки окремі невеликі ланки знань з цієї системи, засвоєні за 1—2 минулі уроки. Цими способами контролю учні привчаються до епізодичності в роботі, до безвідповідальності в навчанні. Вони й самі визнають, що з них більше і не вимагали, ніж за 1—2 уроки, і опитували не частіше двох раз на чверть. Форми поточної перевірки знань мало стимулюють учнів до систематичної роботи, не відбивають дійсного рівня знань на кожному етапі навчання. А між тим «вивчення вчителем дійсного рівня знань учнів і якості їх навчальної праці —

необхідна умова успішного досягнення усіх завдань навчання» *.

Під час експерименту ми прийшли до висновку, що удосконалення процесу навчання нерозривно зв'язано з розробкою раціональних способів перевірки знань, що від недосконалості цієї найважливішої умови навчання залишаються недосконалими усі інші його ланки. Крім звичайної поточної перевірки знань учнів, під час якої визначаються знання учнів у кожний момент навчання, слід розробити і такі форми контролю, за допомогою яких можна перевірити систему знань, умінь і навичок учнів з усієї вивченої теми (розділу) програми.

З метою здійснення ефективного контролю системи знань були введені контрольно-залікові уроки.

З а л і к — це завершуюча форма узагальнення, поглиблення, контролювання с и с т е м и знань, умінь і навичок учнів з певної теми (розділу) програми. Залік є логічним продовженням усієї попередньої навчальної роботи учнів. Як більш досконала форма обліку і оцінки системи знань, умінь і навичок старшокласників заліки доповнюють існуючі форми поточного контролювання знань, але не виключають їх.

Контрольно-залікові уроки переслідують таку мету:

1) виявлення і оцінка знань, умінь і навичок учнів з усієї виучуваної теми, а не з окремих її вузьких частин;

2) стимулювання учнів до активного засвоєння нових знань на всіх передзалікових уроках;

3) формування у старшокласників навичок і звички до систематичної, а не епізодичної навчальної роботи;

4) підвищення відповідальності за навчання;

5) забезпечення наступності між системою оцінки знань у середній і вищій школі.

Раніше вже йшлося про те, що виявлення і оцінка знань, умінь і навичок учнів здійснюється не тільки на контрольно-залікових уроках, а й у процесі вивчення нового матеріалу і його закріпленні, проведенні самостійних і лабораторних робіт, практичних робіт на місцевості, моделюванні.

Колективний експеримент у багатьох школах області показав, що не можна зводити перевірку і оцінку знань,

---

* М. А. Данилов, Б. П. Есипов, Дидактика, М., Изд-во АПН РСФСР, 1957, стор. 354.

умінь і навичок тільки до заліків. Щоб контроль був об'єктивний, слід перевіряти знання учнів на уроках усіх типів і ні в якому разі не обмежуватися заліком. Учитель на всіх уроках слідкує, як учні засвоюють навчальний матеріал, оцінює результати їх класної і домашньої роботи.

Систематична ефективна перевірка знань, умінь і навичок старшокласників орієнтує їх на продуктивнішу роботу в класі і вдома, не призводить до перевантаження при підготовці до складання заліку. Практика показала, що заліки — це не стихійне, надумане явище в роботі учителів старших класів. Саме життя, потреба удосконалити навчальний процес вимагають змінити традиційну практику контролю, коли навчальна діяльність учня за чверть визначалась з 2—3 оцінок, які фактично не відбивали об'єктивного рівня системи знань, умінь і навичок з теми, розділу, курсу, а тільки деякою мірою відображали його епізодичні успіхи за досить короткі інтервали в навчанні.

Як показав досвід, заліки як доповнення до раніше застосовуваних форм контролю підвищують відповідальність учня за навчання. Старшокласники знають, що після вивчення теми слід кожному з них скласти залік, що позитивну оцінку за чверть можна дістати не за знання матеріалу двох-трьох уроків, а лише при умові систематичної, сумлінної роботи на кожному уроці, систематичного виконання домашніх завдань. Тепер ніхто не сподівався, як раніше, на те, що з усього вивченого матеріалу не спитають. Це примушує старшокласників учити весь матеріал сумлінно, свідомо, розв'язувати самостійно усі запропоновані додому задачі і вправи з теми, відмовитися від механічного списування готових розв'язань у класі.

На залікових заняттях підводяться підсумки попередньої роботи. Коефіцієнт корисної дії їх перебуває в прямій залежності від якості роботи, від ефективності навчання на всіх передзалікових уроках. Він буде занадто малим, якщо допустити шаблон і трафарет у викладанні, якщо не підвищити ефективності методів навчання на всіх типах уроків. Без продуманого творчого застосування усіх типів уроків такої системи навчання, заліки в середній школі не виправдовують себе.

Окремі вчителі сприйняли залік механічно, тільки як спосіб перевірки знань, перетворили його в звичайний контроль. Методика його проведення була шаблонна, а іноді переносилася механічно з педагогічних інститутів. Учитель

часто пропонував на вибір п'яти-шести учням запитання або білети, чекав з більшістю учнів приблизно 5—8 *хв*, поки один з них підготується до відповіді, потім запитував його або ще чекав, поки він перенесе свої записи з паперу на дошку, і лише тоді вислуховував відповідь, ставив йому додаткові запитання, тобто працював з одним учнем. Решта продовжувала готувати відповіді на запитання, а більша частина учнів класу, чекаючи на залік, читала підручники, проглядала зошити з розв'язаними задачами, а деякі взагалі нічим не займалися.

За урок учитель міг опитати не більше 6—8 учнів. Якщо в класі 30—40 учнів, то на грунтовну, глибоку перевірку їх знань, умінь і навичок слід було виділяти 4—5 уроків. Ці вчителі не наважувались відводити більше двох уроків на залік. Перевіривши за цей час знання 12—16 учнів, вони відмовлялися в дальшому взагалі від заліків.

Звичайно, заліки в такому вигляді мало що дадуть. Недоліком таких уроків-заліків є й те, що на них в основному здійснювався тільки контроль знань, а до активної навчальної роботи учні не залучалися. Тому на заліках вони не поглиблювали своїх знань і не набували нових. Заліки внаслідок цього не були навчаючими, проходили пасивно, втрачали свій педагогічний зміст.

У процесі окремого, групового, а потім і колективного експерименту було розроблено більш ефективні методи проведення залікових уроків, які дали змогу при мінімальній витраті часу найбільш продуктивно організовувати контролювання знань старшокласників і надавати залікам навчального характеру.

Зараз учителі, які творчо використовують досвід кіровоградських товаришів, відводять на контролювання знань учнів не більше 10—15% навчального часу, відведеного для вивчення кожної теми програми.

Так, у IX класі на контролювання знань учнів відводиться така кількість часу по окремих темах програми: «Рівняння першого степеня і нерівності. Дійсні числа. Квадратні рівняння» — 14%; «Степінь з раціональним показником» — 11%; «Тригонометричні функції будь-якого аргументу» — 10,5%; «Геометричні перетворення» — 9,4%; «Метричні співвідношення в трикутнику і колі»— 8,8%; «Розв'язування трикутників» — 10%.

Звести до мінімуму час на контролювання знань старшокласників вдалося завдяки ефективності методів викладання

на всіх типах уроків, передбачених даною системою організації навчання.

Практика показала, що залік у відриві від усіх попередніх типів уроків (підготовчого, лекційно-практичного, тренувальних вправ, семінарів) і високої їх продуктивності, користі в навчанні старшокласників не приносить.

При новій організації уроків головним є не сам залік, у якій би він формі не провадився. Залік є підведенням підсумків попередньої роботи, а підсумки знаходяться у прямій залежності від якості навчання. Чим краще поставлено вивчення і практичне закріплення матеріалу на кожному уроці, тим кращі будуть знання учнів, тим легше буде проводити залік, тим вищою буде успішність.

Уроки-заліки не відразу прищеплюються в школі, багатьом учням вони не до душі. І напочатку — це цілком закономірне явище. Багато учнів, особливо з посередніми знаннями, внаслідок шаблонної схеми опитування, яка існувала довгі роки, не були привчені до систематичної роботи. Тому спочатку було багато скарг на труднощі у підготовці до заліків.

На запитання інспектора Міністерства освіти УРСР К. С. Бесарабової, чи подобається йому залік, учень Н. відповів: «Ні!» Пояснив він це тим, що раніше, діставши 1—2 оцінки, він був вільний від уроків математики, а тепер треба вчити весь матеріал з певної теми і розв'язувати багато задач з неї, щоб скласти залік.

Залік проводиться по одній чи двох темах приблизно через 10—15 уроків. Учитель призначає залікові заняття, виходячи з характеру матеріалу, що вивчається, рівня підготовки учнів та їх віку.

Якщо на вивчення теми відводиться 5—7 *год*, то її об'єднують з частиною або з усією наступною темою (якщо вона невелика) і після 10—15 уроків матеріал виносять на залік.

Якщо проводити заліки рідше, тоді можуть бути випадки збігу заліків з різних предметів на порівняно невеликому відрізку навчального часу. Це неодмінно призведе до перевантаження учнів. Як показав досвід, рідше проводити залік недоцільно й тому, що це ускладнює працю вчителя (добір запитань і вправ до них) і учня у підготовці до заліку.

Найдоцільніше виносити на залік матеріал, вивчений на 10—15 уроках. Учням легко систематизувати знання не відразу з кількох тем, а з однієї чи двох. Від систематизації і поглиблення знань з окремих тем учні переходять до систе-

матизації знань з кількох тем, а потім на уроках, які відводяться наприкінці навчального року на повторення і огляд, систематизуються знання по всьому курсу.

Кількість заліків і час, потрібний для проведення кожного заняття, визначає вчитель при складанні календарно-тематичного плану на чверть або півріччя.

Залікові уроки, залежно від підготовки учнів з певної теми, учитель може і відмінити. Якщо на всіх попередніх уроках учитель виявив, що учні добре засвоїли вивчений матеріал, то немає потреби проводити залік. Учитель пояснює це учням і ставить залікові оцінки на основі поточних. Це заохочує старшокласників до ще активнішої роботи в класі і вдома. Від заліку звільняються ті учні, які протягом вивчення всієї теми систематично працювали, виявляли глибокі і міцні знання, уміння і навички, мали оцінки не нижче «4» і «5». Про звільнення від заліку учні дізнаються на уроці, перед складанням заліку. Тому до заліку готуються всі без винятку. Учні, які в процесі вивчення теми показали посередні знання, можуть також звільнятися від заліку. На уроці, перед складанням заліку, вчитель обов'язково називає прізвища цих учнів і вказує, що їм зараховується залік з оцінкою «3», але при бажанні вони можуть скласти залік і підвищити залікову оцінку. На практиці ця категорія учнів майже завжди прагне скласти залік, щоб дістати вищу оцінку.

Дати проведення контрольно-залікових уроків учитель обов'язково погоджує з навчальною частиною школи, оскільки в більшості шкіл Кіровоградської області заліки разом з іншими типами уроків застосовують не тільки вчителі математики старших класів й інших предметів (фізики, хімії, літератури, історії, географії, біології). Навчальна частина складає загальношкільний графік проведення заліків з усіх предметів. Продуманий графік запобігає збігу уроків-заліків з різних предметів в один день.

В окремих школах Кіровоградської області практикується дострокове складання заліків старшокласниками. Кращі учні намагаються скласти залік достроково, до цього ж прагне і багато інших, знання яких стають грунтовнішими і глибшими. Дострокове складання заліків вносить велику активність у навчальну роботу. Прагнучи скласти залік достроково, багато учнів активніше працює у класі і вдома, самостійно вивчає новий теоретичний матеріал і розв'язує до нього задачі. Такі учні завжди на кілька уроків

попереду інших по вивченню і закріпленню програмного матеріалу.

Про своє бажання складати залік достроково учень попереджає вчителя заздалегідь з тим, щоб можна було до призначеного дня заліку підготувати запитання і вправи.

Достроково приймати заліки можна на уроці і в позаурочний час. Якщо залік приймається на уроці, то для цього відводиться не більше 10 *хв* (на підготовку час не враховується) і опитуються 1—2 учні, а всіх інших, що бажають скласти залік достроково, опитують на наступних уроках. Часто вчитель пропонує цим учням запитання з матеріалу, який ще не вивчався в класі. Це готує усіх учнів класу до засвоєння нового матеріалу на даному уроці і до наступного заліку.

Часто буває, що після дострокового складання заліку одним-двома учнями, учитель на цьому уроці не пояснює нового матеріалу, оскільки ті, що складали залік, добре пояснили його, а решта учнів добре засвоїла. У цьому випадку вчитель тільки узагальнює новий матеріал, робить висновки і відповідає на усі незрозумілі учням питання, після чого клас переходить до колективного розв'язування задач і вправ на його застосування.

На цьому уроці, таким чином, за рахунок дострокового складання учнями заліку раціонально використовується навчальний час, контроль знань поєднується з повторенням і закріпленням раніше вивченого, вивченням нового матеріалу і є можливість більше, ніж звичайно, потренуватися у розв'язанні задач або прикладів на застосування нового матеріалу. Тим, хто склав залік достроково, учитель і учні виявляють велике довір'я. Вони стають визнаними (а не призначеними вчителем) асистентами вчителя на планових залікових уроках, залучаються до прийому заліків в інших учнів. Практика показала, що, перевіряючи знання інших, учні-асистенти ніколи не допускали лібералізму і завжди об'єктивно інформували вчителя про знання, уміння, навички інших учнів. Учні-асистенти, як правило, користуються в класі великим авторитетом. Вони стають активними помічниками вчителя і на всіх інших типах уроків, особливо на уроках тренувальних вправ. На цих уроках учні-асистенти після виконання своїх завдань підвищеної трудності разом з учителем сідають до інших учнів і допомагають їм розв'язувати задачі. Учні й самі звертаються до асистентів за допомогою.

Досвід роботи показав, що дострокове складання заліків заохочує учнів і є великим стимулом до міцного і всебічного опанування математичними знаннями.

Учні, не допущені до заліку, складають його повторно в індивідуальному порядку після того, як подадуть зошити з розв'язаними задачами і виконають контрольну роботу. Всім учням, які не склали заліку, вчитель призначає новий строк його складання і допомагає у підготовці. Незадовільні залікові оцінки в класному журналі не ставляться, а в графі «залік» залишається вільне місце до того часу, поки не буде складено залік.

Учні, не допущені до заліку, і ті, які дістали незадовільні оцінки, складають його в позаурочний час або на початку одного з двох наступних уроків. Для цього на кожному уроці відводиться *не більше 10 хв.*

Оцінки за чверть ставляться на основі залікових. Якщо залік не складено хоча б з однієї з тем, позитивна оцінка за чверть не виставляється.

Від заліку звільняються учні, які показали глибокі і міцні знання, брали активну участь на семінарі, на уроках тренувальних вправ і під час контрольної роботи підтвердили вміння застосовувати теорію на практиці і подали зошити з усіма розв'язаними задачами. З часом число таких учнів збільшується, і це дуже добре, бо бажання звільнитися від заліку веде до серйознішої систематичної роботи під час шкільних занять і виконання домашніх завдань. Залікова оцінка таким учням ставиться на основі результатів повсякденної роботи на уроках.

При цьому дуже важливим є індивідуальний підхід до кожного учня. Прізвища учнів, звільнених від заліку, слід повідомляти на початку уроку-заліку. Раніше вчителі робили це наприкінці семінарського заняття і допускали цим помилку, бо учні не готувалися до заліку, а отже, не продовжували поглиблювати свої знання і на самому заліку.

Учні, звільнені від заліку, дістають на уроці завдання підвищеної трудності. Виконання цих завдань може підвищити їх залікову оцінку.

Практика вказує, що при ефективній організації усіх передзалікових уроків на самому заліку не обов'язково опитувати всіх учнів. Адже при такій системі навчання є всі можливості всебічно виявити знання всіх учнів у процесі вивчення теми, а сам залік сприяє узагальненню і поглибленню знань з теми, організує їх на систематичне, сумлінне

вивчення всього матеріалу. Тому під час заліку вчитель може обмежитися перевіркою знань лише тих учнів, які мало працювали і знання яких недостатньо виявлені. Усім іншим учням, як уже згадувалось, залікова оцінка ставиться на основі результатів повсякденної роботи на уроках.

Наприкінці заліку вчитель робить висновки з вивченої теми, оголошує оцінки, вказує на недоліки в знаннях окремих учнів, рекомендує індивідуальні завдання.

Методика проведення залікових занять визначається самим учителем, виходячи з характеру матеріалу, що вивчається, і рівня знань, умінь і навичок учнів даного класу.

На залік можна виносити або тільки теоретичні питання, або практичні завдання і, нарешті, поєднувати те й друге. Усе залежить від особливостей матеріалу, який вивчається. Якщо, наприклад, теоретичні питання складні й зв'язані з громіздкими тотожними перетвореннями або побудовами рисунків просторових фігур (теореми про об'єми многогранників), то слід цим і обмежитися. Вміння розв'язувати задачі доцільно перевірити на письмовій контрольній роботі.

Якщо теоретичний матеріал невеликий (теми «Тригонометричні таблиці», «Розв'язування прямокутних трикутників» тощо), то досить дати ряд практичних завдань. Якщо ж теоретичні питання цікаві за змістом, але водночас не вимагають великих записів і довгих міркувань, то залікові завдання можуть також містити приклади або задачі (наприклад, тема «Комплексні числа» в курсі алгебри).

Коли вчитель визначив характер заліку, слід намітити вузлові питання теорії і підібрати систему відповідних задач і прикладів. Деякі вчителі доводять їх до відома учнів. Практика показує, що в цьому немає нічого поганого, бо найголовніше в тому, щоб учні виявили знання і навички з вивченої теми.

Одночасно з класом готується до проведення заліку і сам учитель, складаючи картки з індивідуальними завданнями. До заліку, на який, наприклад, виносяться теоретичні питання і практичні завдання, вчитель повинен підготувати білети з теоретичними питаннями і практичними задачами і вправами до них трьох ступенів трудності (I, II, III); узагальнити всі недоліки в розв'язуванні задач, виявлені в процесі систематичної перевірки учнівських зошитів; перевірити контрольну роботу (якщо вона була), зробити її повний аналіз з тим, щоб, приймаючи залік, виявити знання кожного учня з тих питань, які він погано знає або

які не засвоїв; підготувати завдання підвищеної трудності для тих учнів, яких звільнено від заліків.

Зміст залікової картки залежно від характеру заліку буває різний. Наприклад, з теми «Комплексні числа» картки, складені вчителем Г. Й. Пашковським (Помошнянська СШ № 2), містили основне теоретичне питання і практичні завдання у трьох варіантах за складністю. Крім того, вчитель підібрав додаткові запитання, які ставив після відповіді на основні.

Ось приклад однієї із залікових карток з алгебри.

№ 4

1. Уявне число. Причини введення уявних чисел в математику. Короткі історичні відомості.

2. Задача.

I ступінь трудності

Обчислити $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$.

II ступінь трудності

Задача.

Двигун надає моторному човну швидкість 15 *км/год*, напрямлену на північний схід під кутом 75° до лінії «захід — схід», а течія зносить човен із швидкістю 6 *км/год*, напрямленою також на північний схід, але під кутом 25° до лінії «захід — схід».

Обчислити величину і напрям результуючої швидкості човна (рис. 48).

Розв'язання. Зобразимо човен точкою O, швидкість, надану човну двигуном, зобразимо відповідним радіусом-вектором $\overrightarrow{OA}$, а швидкість течії — радіусом-вектором $\overrightarrow{OB}$.

Тоді остаточна швидкість човна зобразиться радіусом-вектором $\overrightarrow{OC}$, що є діагоналлю паралелограма $OACB$, побудованого на радіусах-векторах $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ як на сторонах (рис. 48).

Відповідно до умови задачі маємо, що $OA = 15$ од. масштабу, $OB = 6$ од. масштабу, $\angle MOA = 75°$, а $\angle MOB = 25°$.

Приймаючи прямі, проведені через точку O з заходу на схід і з півдня на північ, відповідно за вісь дійсних чисел і вісь уявних чисел, а точку O — нульовою точкою цих осей, дістанемо змогу розглядати радіуси-вектори $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ не лише як зображення відповідних швидкостей, а й також як зображення відповідних уявних чисел.

Радіус-вектор $\vec{OA}$, маючи у довжину 15 од. масштабу і утворюючи з додатним напрямом осі дійсних чисел кут у 75°, зображує уявне число, у якого модуль 15, а аргумент 75°, тобто уявне число $15 \cos 75° + 15i \sin 75° \approx \approx 3{,}9 + 14{,}4\ i$.

Аналогічно знайдемо, що уявне число, зображене радіусом-вектором $\vec{OB}$, дорівнює $6 \cos 25° + 6\ i \sin 25° \approx 5{,}4 + + 2{,}5\ i$.

Тому радіус-вектор $\vec{OC}$, що являє собою суму радіусів-векторів $\vec{OA}$ і $\vec{OB}$, зображує уявне число, що є сумою уявних чисел $3{,}9 + 14{,}4\,i$ та $5{,}4 + 2{,}5\,i$, тобто уявне число $9{,}3 + 16{,}9\ i$.

Довжина радіуса-вектора $\vec{OC}$ виражається модулем, а напрям — аргументом цього уявного числа:

$$|9{,}3 + 16{,}9\,i| = \sqrt{9{,}3^2 + 16{,}9^2} \approx 19{,}3.$$

$$\varphi_{9{,}3+16{,}9i} = \operatorname{arctg} \frac{16{,}9}{9{,}3} \approx 61°.$$

Отже, результуюча швидкість човна дорівнює 19,3 *км/год* і напрямлена на північний схід під кутом 61° до лінії «захід — схід».

III ступінь трудності

З а д а ч а. Вітер дме на вертоліт у напрямі з півдня на північ із швидкістю 60 *м/сек*. Обчислити величину і напрям швидкості, яка повинна надаватися вертольоту його двигуном, щоб вертоліт тримав курс із заходу на схід із швидкістю 80 *м/сек* (рис. 49).

Р о з в ' я з а н н я. Зобразимо вертоліт точкою O, швидкість, що надає вертольоту вітер, зобразимо радіусом-вектором $\vec{OA}$, що має у довжину 60 одиниць масштабу і напрямлений вертикально вгору (тобто, відповідно до загаль-

неприйнятого умовного позначення частин світу, з півдня на північ), остаточну швидкість вертольоту зобразимо радіусом-вектором $\overrightarrow{OB}$ довжиною у 80 од. масштабу і напрямленим горизонтально вправо (тобто із заходу на схід).

Очевидно, що швидкість, надана вертольоту двигуном, є різниця від віднімання швидкості вітру від остаточної

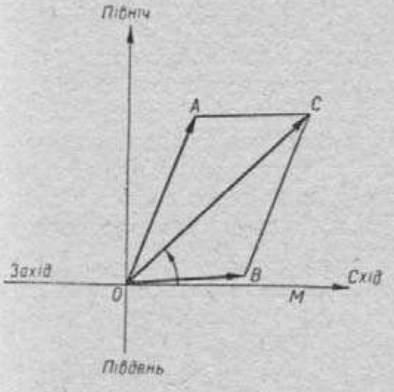


Рис. 48.

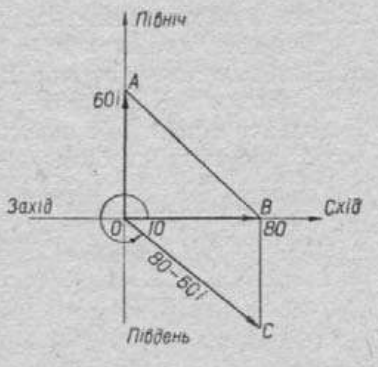


Рис. 49.

швидкості вертольоту, а тому зображується радіусом-вектором, що становить різницю радіусів-векторів $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OA}$, тобто $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

За відомим з курсу фізики правилом віднімання векторів, напрямлених не по одній прямій, будуємо паралелограм $OABC$ за його стороною $\overrightarrow{OA}$ і діагоналлю $\overrightarrow{OB}$. Тоді швидкість, надана вертольоту його двигуном, зобразимо радіусом-вектором $\overrightarrow{OC}$.

Взявши точку O за нульову точку числових осей і вважаючи прямі, по яких напрямлені радіуси-вектори $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OA}$, відповідно віссю дійсних і віссю уявних чисел, ми дістанемо можливість розглядати радіус-вектор $\overrightarrow{OB}$ як зображення дійсного числа 80, а радіус-вектор $\overrightarrow{OA}$ як зображення уявного числа $60i$. Тоді радіус-вектор $\overrightarrow{OC}$ можна буде вважати зображенням комплексного числа $80-60i$, звідки зробимо висновок, що довжина і напрям радіуса-вектора $\overrightarrow{OC}$ відпо-

відно виражається модулем і аргументом цього уявного числа:

$$r = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100.$$

$$\varphi = 360° - \operatorname{arctg}\frac{60}{80} = 360° - \operatorname{arctg} 0{,}75 = 323°6',$$

де r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа.

Вибір того чи іншого варіанта практичного завдання в заліковій картці надається самому учневі.

Якщо задача і вправи, що входять у залікову картку, є в стабільному задачнику, то їх зміст не переписують на картку, а вказують тільки номери задач або вправ із задачника. На заліку з теми «Комплексні числа» учні відповідали на теоретичні питання біля дошки, а аркуші з розв'язаними задачами здавали вчителеві. Розв'язання перевірялось після заліку, а результати заліку заносились у таку таблицю:

Таблиця

№ п.п	Прізвище учня	Загальна оцінка за поточне опитування по темі	Теоретичні питання	Практичні завдання	Додаткові запитання	Домашнє завдання	Загальний бал
1	Петренко Г.	4	5	4	4	4	4

Інакше проходив у цього вчителя залік на підтему «Об'єм паралелепіпеда і призми». У цьому випадку було складено 8 карток, які охоплювали вузлові питання теми. Ось приклади кількох запитань:

1. Основні допущення про об'єми. Об'єм прямокутного паралелепіпеда, виміри якого виражаються цілими числами.

2. Об'єм прямокутного паралелепіпеда, виміри якого виражені дробовими числами.

3. Об'єм прямокутного паралелепіпеда, виміри якого виражені ірраціональними числами.

До кожної картки були підібрані додаткові запитання, які фіксувалися тільки в поурочному плані учителя. Ось приклади. До білета № 1: «Як застосовуються основні положення про об'єми при доведенні теореми про об'єм прямокутного паралелепіпеда, виміри якого виражені цілими числами?» До білета № 2: «Як зміниться число, яке виражає об'єм даного паралелепіпеда, якщо лінійну одиницю вимі-

рювання зменшити в *авс* раз?» До білета № 3: «Позначимо наближені значення даного ірраціонального числа, взяті з «*n*» десятковими знаками, через α_n (з недостачею) і α'_n (з надвишком). Що можна сказати про ці значення, якщо «*n*» нескінченно зростає?».

На початку заліку до дошки було викликано одночасно трьох учнів. Поки вони готувалися, один із бажаючих відповідав без попередньої підготовки. Слухаючи відповіді, учні робили собі замітки, а потім вносили поправки та доповнення. Якщо зауважень не було, то викликаному учневі давали додаткове запитання. Усі поправки і доповнення враховувалися. Учні, які, даючи істотні зауваження, показали добре знання матеріалу, діставали відповідний бал без виклику до дошки.

Якщо після відповіді на 8 карток залишалися неопитані учні, весь комплект карток використовувався вдруге, але додаткові запитання ставилися вже інші, наприклад до білета № 1: «Необхідною чи достатньою умовою рівності геометричних фігур є їх рівновеликість?».

Учні, звільнені від того чи іншого заліку, в цей час виконують завдання підвищеної трудності. Виконання завдань не оцінюється, але наслідки обговорюються у позаурочний час, звичайно на засіданнях математичного гуртка.

П р и к л а д з а в д а н н я. Площа бічної грані правильної шестикутної призми дорівнює Q. Через бічне ребро проведено переріз, що поділяє призму на частини, об'єми яких відносяться, як 1 : 3. Знайти площу перерізу.

Залежно від змісту теми та підготовки учнів вчителі математики Кіровоградської області практикують такі види заліків.

Усний залік без попередньої підготовки учнів

Тут учні відповідають на запитання без попередньої підготовки.

Переходячи до нової теми, вчитель повідомляє учням *запитання, номери задач і прикладів до заліку, рекомендує* основну і додаткову літературу до залікової теми. До заліку готуються запитання, які передбачають всебічну перевірку знань, умінь і навичок учнів.

Готується також і необхідна кількість практичних завдань для усного і письмового розв'язання. Запитання і приклади вимагають лаконічних, точних відповідей.

Учитель приходить на залік з готовою таблицею, в якій заздалегідь проставлені оцінки за письмову домашню роботу.

Таблиця

№ п.п	Прізвище, ім'я учня	Оцінка за				Доповнення відповідей своїх товаришів	Загальна оцінка
		домашнє завдання до заліку	відповіді на запитання				
			I	II	III		
1	Арістархов Л.	4	5	4	5	5	5
2	Ахметшина Е.	5	4	4	5	—	4

Такий залік був проведений, наприклад, в XI класі Кремгесівської школи № 2 (учитель В. Г. Коваленко) з теми «Комплексні числа».

Клас був обладнаний таблицями з геометричними інтерпретаціями дій над комплексними числами. На переносній дошці накреслена прямокутна система координат, заповнена кліточками. Як видно з наведеної форми, кожному учневі в обов'язковому порядку ставиться оцінка за аналіз і доповнення відповідей своїх товаришів, що допомагає підтримувати активну діяльність учнів протягом усього уроку.

Примірний перелік залікових питань з теми «Комплексні числа»

1. Історія введення натуральних і дробових чисел.
2. Цілі числа.
3. Ірраціональні числа (означення і потреба їх введення).
4. Уявна одиниця.
5. Уявні числа.
6. Комплексні числа, рівність комплексних чисел, рівність нулю комплексних чисел; спряжені числа.
7. Сума комплексних чисел в алгебраїчній формі.
8. Віднімання комплексних чисел в алгебраїчній формі.
9. Множення комплексних чисел в алгебраїчній формі.
10. Ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі.
11. Степені уявної одиниці.
12. Геометрична інтерпретація комплексного числа.
13. Формула тригонометричної форми комплексного числа.
14. Правило множення комплексних чисел у тригонометричній формі.

15. Правило ділення комплексних чисел у тригонометричній формі.

16. На таблиці показати і пояснити геометричну інтерпретацію дій: додавання, віднімання, множення і ділення.

17. Геометрична інтерпретація: $i^2 = -1$.

18. Показати, що $i^2 = -1$ множенням i на i, використовуючи тригонометричну форму комплексного числа.

19. Чому дорівнює сума і різниця двох протилежних комплексних чисел? Навести приклад.

20. Чи можна порівняти числа $2 + 3i$ та $20 + 30i$?

Запитання-приклади

1. Показати на координатній площині точки, які відповідають числам: $2 + 3i$; $-4 + 2i$; $-3 - 2i$; $-6i$.

2. Назвати числа і показати на площині точки, що відповідають спряженим числам: $-2 + 3i$; $-4 - 5i$; $-2i$ і т. д.

3. Назвати числа, протилежні числам: $5 - i$; $-6 - 2i$; $4i$.

4. Знайти суму: $(-7 - 3i) + (-2 + 4i)$.

5. Знайти різницю $(-13 - 7i) - (4 + 2i)$.

6. Піднести до степеня усно: $(1 + i)^2$; $(1 - i)^2$; $(1 + i)^3$.

7. Виконати ділення: $\frac{1 \pm i}{1 \pm i}$; $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$.

8. Розкласти на множники: $a^2 + b^2$; $a + 2$; $4 + 3a$; $a + 1$.

9. Виразити у тригонометричній формі:

$$\frac{1}{2} + i\sqrt{3};\ \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i);\ i.$$

10. Подати в алгебраїчній формі:

$$n = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ);\quad n_1 = 6(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ);$$

$$n_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right).$$

11. Виконати множення: $(\sqrt{k} + i\sqrt{e})(\sqrt{k} - i\sqrt{e})$. $(5 + i)(5 - i)$; $(1 - i)^4$.

Учні, звільнені від заліку, дістають картки з завданням підвищеної трудності.

Цей вид заліку вимагає від кожного учня відповіді на 3 запитання.

При сумлінній попередній підготовці до заліку учнів і вчителя таке опитування забирає не більше 45 *хв*. Учитель пропонує запитання, враховуючи індивідуальні особливості учнів.

Наведемо приклад уроку-заліку такого типу в X класі Маловисківської школи № 3 (учитель М. А. Бровченко). Одержавши білети, кожний учень відповідає без попередньої підготовки на уроці на теоретичне запитання.

Т е м а. Формули перетворення тригонометричних функцій в суму і суми тригонометричних функцій у добуток.

Учням пропонується 20 білетів, у яких теоретичні запитання повторюються, а практичні даються окремо. Після того як учень відповість на теоретичне запитання і розв'яже приклад на «4», він має право розв'язувати приклад на «5» і тим самим підвищувати свій заліковий бал.

Зразок такого виду білетів на заліку

1. Виразити функцію $\cos\alpha$ через тангенс половинного аргументу.

I ступінь трудності: $\sin(5\alpha+\beta)+\sin(3\alpha+\beta)$.

II ступінь трудності: $1+2\sin^2\beta$.

III ступінь трудності: $\dfrac{\sin^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha-4+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

2. Виразити функцію $\sin\alpha$ через тангенс половинного аргументу.

I ступінь трудності: $\sin(90^\circ+\alpha)-\sin(90^\circ-\alpha)$.

II ступінь трудності: $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}3\alpha$.

III ступінь трудності: $\dfrac{\left(\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$

$=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

3. Перетворити суму тригонометричних функцій у добуток.

I ступінь трудності: $1-2\cos\alpha$.

II ступінь трудності: $4\sin^2\alpha - 3 = 4\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$.

III ступінь трудності: $\sin y - \sin\gamma = \cos^2\beta + \cos^2\alpha - \sin^2(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta)$.

4. Перетворити добуток тригонометричних функцій у суму: $\sin y \cdot \sin\gamma$.

I ступінь трудності: $1 + 2\sin\alpha$.

II ступінь трудності: $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$.

III ступінь трудності: $\sin\alpha + \cos\alpha - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Перетворити в добуток вираз: $c\sin\varphi + d\cos\varphi$.

I ступінь трудності: $\frac{1 + \cos(\alpha - \beta)}{1 - \cos(\alpha - \beta)}$.

II ступінь трудності: $1 + \sin\alpha - \cos\alpha$.

III ступінь трудності: $\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

Учні, звільнені від складання заліку, одержали відповідні білети підвищеної трудності, а саме:

I

1. Звести до вигляду, зручного для логарифмування: $\sqrt{3 - 2\cos^2\alpha}$.

2. Довести тотожність: $8\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ = \operatorname{ctg} 10^\circ$.

3. Довести: $\sin^2(\alpha - 30^\circ) + \sin^2(\alpha + 30^\circ) - \sin^2\alpha = 0{,}5$.

II

1. Звести до вигляду, зручного для логарифмування: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$, де $a > 0$, $b > 0$; $0 < \alpha < \pi$.

2. Довести правильність такої рівності: $\sin 10^\circ \times \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$.

3. Перетворити в добуток: $2 - \cos 2\alpha$.

1. Звести до вигляду, зручного для логарифмування: $12 \sin 3x + 5 \cos 3x$.

2. Перетворити в суму: $4 \sin 12^\circ \cos 16^\circ \cos 20^\circ$.

3. Розв'язати рівняння: $3^{\lg \operatorname{tg} x} + 3^{-\lg \operatorname{tg} x} = 2$.

У викладача на окремому аркуші були розв'язання і відповіді для всіх запропонованих прикладів, що прискорило їх перевірку.

Творчий залік, що поєднує елементи семінару і звичайного опитування

Готуючись до творчого заліку, учні складають задачі за заданими величинами, знаходять нові шляхи доведення теорем, формулюють і доводять ними ж складені теореми.

До творчого заліку учні і вчителі готуються заздалегідь. Кожний учень може перед заліком проконсультуватися з учителем, щоб уникнути можливої помилки при доведенні сформульованої ним теореми або розв'язанні складеної задачі. Учень ніби виступає із захистом своєї творчості. Вдале доведення теореми або розв'язання задачі, складеної учнем, вселяє у нього віру в свої сили і здібності до математики, підвищує його авторитет серед товаришів, бо він «творить», «створює», а не тільки сприймає готове.

Творчий залік звичайно проводять по нескладних темах. Переказ вивчених положень такої теми не дуже зацікавлює учнів. Цікаво буває завжди те, що народжує нові думки, нові знання. Мета творчого заліку, крім контролювання знань,— викликати у старшокласників нові думки, нові ідеї.

У цьому заліку беруть участь всі учні. За два-три дні до заліку учні подають в зошитах оформлені в належному порядку свої «винаходи». Вчитель переглядає роботи і кращі з них виносить на залік. Робота не обмежується заслуховуванням підготовлених повідомлень, доведень, розв'язків. Поряд з цим учням пропонують запитання і задачі, мета яких — визначити ступінь засвоєння вивченого матеріалу.

Ось приклад творчого заліку з геометрії у X класі Помошнянської школи № 2 (учитель Г. С. Савченко) з теми «Двогранні кути і перпендикулярні площини».

За два дні до заліку учні подали зошити з задачами № 12, № 10 (1, 2), № 17, № 18 (Н. Рибкін, ч. II). У цих же

зошитах були оформлені самостійно складені задачі на обчислення, побудову, доведення, а також сформульовані і доведені теореми.

Ось приклади деяких теорем і задач, складених самими учнями.

Т е о р е м а. Якщо двогранний кут прямий, то перпендикуляр, проведений в одній із граней до ребра, буде перпендикуляром і до другої грані (рис. 50). (Склала Рабцун Галя).

Дано: пл. $P \perp$ пл. Q.
$AB \perp CD$.

Треба довести: $AB \perp$ $\perp$ пл. Q.

Для доведення у площині Q побудуємо $BF \perp CD$. Лінійний кут ABF прямий. Висновок: $AB \perp CD$ і $AB \perp BF$, тому на основі достатньої умови перпендикулярності прямої до площини $AB \perp$ пл. Q. Аналогічне доведення і для перпендикуляра BF.

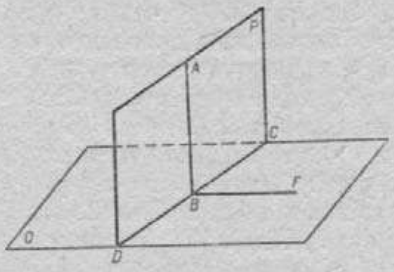


Рис. 50.

З а д а ч а. У правильній трикутній піраміді через одну з вершин основи провести площину, перпендикулярну до протилежної бічної грані. Ребро основи — a, кут нахилу бічної грані — α.

Знайти площу одержаного перерізу (рис. 51). (Склала Боброва Таня).

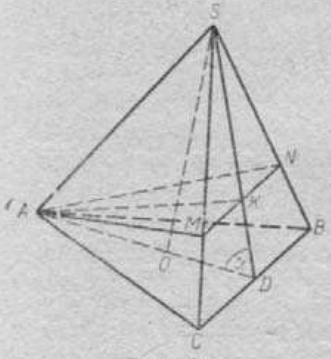


Рис. 51.

Після побудови перерізу учениця ставить запитання, як знайти площу перерізу. Вона міркує так. Щоб побудувати площину, перпендикулярну до грані SBC, слід її провести через перпендикуляр до цієї грані (А. П. Кисельов, ч. II, § 43). Цей перпендикуляр будує в площині $\triangle SAD$ ($AK \perp SD$ і $AK \perp MN$). Відрізок $MN \parallel BC$.

Щоб знайти площу перерізу, учениця використовує розглянуте на семінарі положення, що площа ортогональної проекції плоского многокутника на площину дорівнює площі

цього многокутника, помноженій на косинус кута між площиною многокутника і площиною проекції.

Трикутник ABC — рівносторонній.

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad \angle SDA = \alpha; \quad \angle DAK = 90^\circ - \alpha.$$

$$S_{AMN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\sin\alpha \text{ (кв. од.)}.$$

З а д а ч а. Частина куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, відтята площиною, яка проходить через вершину D і діагональ A_1C_1. Побудувати площину, що проходить через ребро BB_1 перпендикулярно до площини перерізу. Знайти площину перерізу, якщо ребро куба дорівнює a (рис. 52). (Склав Фролов Вітя).

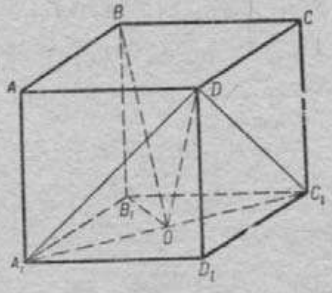


Рис. 52.

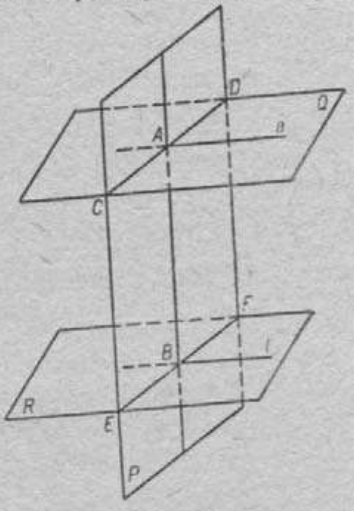


Рис. 53.

П о б у д о в а. Будуємо $B_1O \perp A_1C_1$ і проводимо відрізок BO; тоді $BO \perp A_1C_1$ (на основі теореми про три перпендикуляри).

Площина, що проходить через прямі, які перетинаються, B_1O і BB_1, буде шукана. Доводимо на основі теореми § 44. Площу перерізу знаходимо за формулою площі трапеції.

$$S_{B_1BDO} = \frac{BD + B_1O}{2} \cdot BB_1 = \frac{a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot a =$$

$$= \frac{3}{4}a^2\sqrt{2} \text{ (кв. од.)}.$$

З а д а ч а. Якщо площина (P) перпендикулярна до однієї з паралельних площин (до пл. Q), то вона буде пер-

пендикулярна і до другої площини (R) (рис. 53) (Склав Усін Сергій).

Дано: пл. $Q \parallel$ пл. R,
пл. $P \perp$ пл. Q.

Треба довести, що пл. $P \perp$ пл. R.

Доведення не наводимо.

Тут наведено лише кілька прикладів задач і теорем, поданих учнями на залік. Як бачимо, кожне з наведених положень включає в себе знання теорії за програмою.

Загальна оцінка виводиться на основі кількох оцінок, виставлених за різні види роботи учня з вивченої теми.

№ п.п	Прізвище учня	Домашнє завдання	Творча робота	Теоретичні питання з теми	Загальна оцінка
1	Кулик Г.	5	5	—	5
2	Безруков В.	4	5	5	5

Запитання по вивченому матеріалу на творчому заліку ставляться лише тим учням, знання яких викликають сумнів.

Залікова перевірка виконання домашніх практичних робіт з усним опитуванням по теоретичній частині теми, розділу

Передбачене цим видом заліку моделювання, набуття уміння користуватися вимірювальними інструментами дає можливість розвивати конструкторські здібності учнів, учить застосовувати теорію на практиці.

Виготовити модель до задачі — це надати математичним поняттям реальної форми.

При такому заліку перед вивченням теми кожний учень одержує задачу, яка включає теоретичні і практичні положення з теми, що вивчається. Учень виготовляє модель до задачі, виконує стереометричний рисунок до неї, а також подає докладне розв'язання задачі з аналізом взаємозалежностей між шуканими і даними елементами.

Оформлену домашню роботу учні приносять за 2 дні до заліку. Учитель перевіряє роботу і ставить оцінку. На залік учень приносить ще кілька задач, запропонованих раніше для розв'язання.

Проводячи залік, учитель ставить на столі всі виготовлені учнями прилади і моделі, а також небхідні наочні посібники з шкільного кабінету, по яких учні, що відповідають, коротко коментують розв'язання задач і доводять теореми.

Учитель приходить у клас із заздалегідь дібраними теоретичними запитаннями і задачами, необхідними для глибокої перевірки якості виконання домашніх практичних завдань і рівня знань теоретичного матеріалу з залікової теми. Кожному учневі оцінку ставлять у такій таблиці:

Таблиця

№ п.п	Прізвище учня	Оцінка за				Участь у роботі класу	Загальна оцінка
		перевірку задач до заліку	модель до задачі	розв'язування задачі	теоретичні питання		
1	Костенко О.	4	4	4	3	4	4
2	Кирилова Р.	5	4	5	4	5	5

Першу, другу і третю графи учитель заповнює перед заліком на основі результатів перевірки домашніх робіт, останні графи заповнює в класі. Загальну оцінку виставляє в журнал.

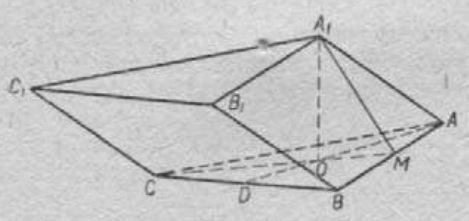


Рис. 54.

Учні, які виготовили кращий прилад до задачі, бездоганно виконали рисунок і розв'язали задачу, написали контрольну роботу на «5», сумлінно працювали на всіх уроках, систематично виконували домашні завдання, а також активно виступали на семінарі, звільняються від заліку. Їм пропонуються задачі підвищеної складності.

Підготовка учня до заліку такого типу, наприклад з теми «Об'єм многогранників», полягає ось у чому. Учень С., одержавши задачу № 51, § 16, Н. Рибкін, ч. II (З а д а ч а. Основою призми є правильний трикутник ABC із стороною a; вершина A_1 проектується в центр нижньої основи, її ребро AA_1 утворює із стороною основи кут у 45°. Визначити об'єм призми») (рис. 54), дома виготовляє модель до неї із

скла, дроту або з кольорових ниток на каркасі. (Рекомендації по виготовленню приладу дає вчитель).

На двох аркушах із зошита учень записує розв'язання задачі і подає рисунок у косокутній проекції. При розв'язуванні задачі учень встановив, що $A_1M \perp AB$ (на основі теореми про три перпендикуляри). Точка O поділяє відрізок AD у відношенні 2 : 1, а тому $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

З умови задачі відомо, що $\angle A_1AM = 45°$, отже, і $\angle MA_1A = 45°$, звідки за теоремою Піфагора маємо:

$$AA_1 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2};$$

$$A_1O = \sqrt{A_1A^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6};$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{c}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8} \text{ (куб. од.)}.$$

На уроці-заліку учитель перевіряє, наскільки учень розуміє задачу, а потім йому пропонує запитання з теорії про об'єм зрізаної піраміди. Наприклад, учень повинен розповісти, як знайти висоту надбудови, сформулювати теорему про об'єм зрізаної піраміди. Якщо учень правильно відповідає на пропоновані запитання, то можна не сумніватися в глибині і міцності його знань.

Письмова залікова робота

Такий вид заліку проводиться після вивчення тем, які містять великі за обсягом доведення, коли вчитель прагне простежити логічність і послідовність повного доведення учнями того чи іншого математичного положення, а усна перевірка засвоєння їх вимагає багато часу. Цей вид заліку привчає учнів послідовно викладати свої думки. Готуючись до письмового заліку, учні заздалегідь одержують додому певну кількість запитань з теорії і задачі до них. Під час заліку кожний учень одержує білет з теоретичним запитанням і задачею. Відповідь він повинен дати в письмовій формі

Досвід показує, що доцільно до письмового заліку підбирати такі диференційовані завдання, на виконання яких

відводиться не більше 30 *хв* з тим, щоб за час, який лишився, одні учні могли прорецензувати роботи інших. Цим досягається ще більш грунтовна перевірка знань учнів з вивченої теми. Більшість учнів заздалегідь розв'язує задачі до заліку, консультуючись при цьому з учителем.

Приклад письмового заліку в IX класі з теми «Подібність фігур» (Олександрійська школа № 10, учитель С. С. Міняйло)

Учням було дано 20 теоретичних запитань і такі задачі: № 1—6, § 1 (8); № 31—40, § 2 (9); № 55—60, § 2 (9).

Ось приклад однієї із залікових карток.

1. Вимірювання відрізків, сумірних і несумірних з одиницею вимірювання.

2. У даний трикутник вписати прямокутник, у якого сторони відносилися б, як $m : n$.

До цього заліку готується така табличка для обліку знань:

№ п.п	Прізвище учня	Оцінка за			Загальна оцінка
		ведення домашнього зошита	I питання	II питання	
1	Амелін С.	3	4	3	3
2	Ахметова Д.	4	5	5	5

А це приклад білета для письмової залікової роботи з теми «Двогранні кути», яку провадив учитель А. Г. Вайнер з м. Глазова Удмуртської АРСР:

1. Довести теорему: «Більшому лінійному куту відповідає більший двогранний кут».

2. Довести, що пряма a і площина α, перпендикулярні до однієї площини, паралельні, якщо a не лежить на площині α.

3. Розв'язати задачу № 2, § 4, Н. Рибкін, ч. II.

Письмовий залік відрізняється від контрольної роботи тим, що учні заздалегідь знають, на які запитання вони відповідатимуть, які задачі розв'язуватимуть. Якщо учень виконав роботу за 25—30 *хв*, то учитель на уроці відразу ж перевіряє її і ставить оцінку. Звільнені від заліку розв'язують задачі підвищеної складності, деяким з них пропонується додаткова література з вивченої теми.

Усний залік з попередньою підготовкою до відповіді

При такому заліку всі учні дістають завдання одночасно і готують відповіді на запитання (доводять теореми, виводять формули, розв'язують задачі) безпосередньо біля дошки або за партою на окремому аркуші паперу. На такий залік відводиться 1—2 уроки. Доведення і розв'язання задач учитель перевіряє під час бесіди з учнями біля дошки або по записах, виконаних учнями на папері. При потребі учитель як у першому, так і в другому випадках пропонує учням, які відповідають, відповідні запитання для повного виявлення знань, умінь і навичок. При цьому активну участь у доповненнях і виправленнях відповідей беруть учні, не зайняті складанням заліку.

На залік у X класі Олександрійської школи № 20 учитель І. Т. Чорний об'єднав кілька тем: «Теореми додавання і формули подвоєного і половинного аргументу».

Знання цих формул з тригонометрії є міцним фундаментом для дальшого вивчення матеріалу і розв'язання прикладів. На заліку кожний учень виводив на дошці одну із запропонованих формул, розв'язував приклади, доводив тотожності.

Приклади залікових карток

Білет № 1

1. Подати $\sin\alpha$ через функції половинного аргументу.
2. Довести, що $\sin^2(\alpha - 30^\circ) + \sin^2(\alpha + 30^\circ) - \sin^2\alpha = 0{,}5$.
3. Спростити вирази (усно): $\cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ - \sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ$.

Білет № 2

1. Знайти $\sin(60^\circ - \alpha)$, якщо $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$; $(180^\circ < \alpha < 270^\circ)$.
2. Вивести формулу $\cos 2\alpha$.
3. Спростити вираз (усно): $\frac{\operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ}$.

Приклади білетів для усного заліку (Школа № 6 м. Глазова Удмуртської АРСР, учитель А. Г. Вайнер)

З геометрії

1. Визначити і обчислити бічну поверхню конуса. Знайти повну поверхню конуса.

2. Знайти вагу валика (рис. 55), питома вага якого дорівнює 7,8. Розміри вказані на рисунку.

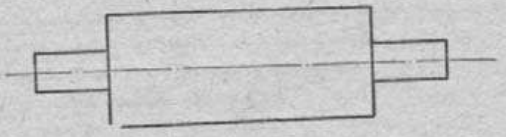


Рис. 55.

3. Як зміниться об'єм циліндра, якщо висоту його зменшити в 3 рази.

З алгебри

1. Скласти план доведення теорем про рівнозначність нерівностей. Записати для однієї з теорем умову в загальному вигляді. Дати означення рівнозначних нерівностей.

2. Помножити обидві частини нерівностей:

а) $18a^2 - 6 < 5b$ на b^3;

б) $7 - 2a > 3a^2$ на $(3 - a)^2$.

3. Розв'язати нерівності: $\frac{16,4}{4 - 3x} < 0$; $\frac{3x - 1}{x + 1} > 1$.

Приклади залікових білетів у цій самій школі з теми «Куля»

Білет № 1

1. Означення кулі, сфери. Порівняти з означенням кола, круга. Взаємне розташування кулі і площини. Довести теорему про переріз кулі площиною.

2. Задача. Дах має форму напівкульового купола, окружність якого дорівнює 30 *м*. Скільки оліфи піде на фарбування даху, якщо на 1 $м^2$ поверхні даху треба 0,25 *кг* оліфи?

3. Поверхня однієї кулі в 4 рази більша за поверхню другої. У скільки разів об'єм першої кулі більший за об'єм другої?

Білет № 8

1. Скласти план вивчення теми «Куля».
2. Лінія перетину двох сфер є коло. Довести.
3. Діаметр однієї кулі становить половину другої. Як відносяться об'єми цих куль?
4. Записати формулу об'єму кульового сектора, як функцію його висоти.

У білети включаються всі питання, що охоплюють основний зміст теми та практичні задачі і вправи до неї.

По темі «Двогранні кути, перпендикулярні площини, многогранні кути», залік був проведений по таких білетах (учитель С. С. Міняйло, Олександрійська школа № 13).

Білет № 1

1. Дайте означення півплощини.
2. Точку A взято поза площиною α. Як через цю точку провести площину, перпендикулярну до площини α? Скільки розв'язків має задача?
3. Чи можна побудувати тригранний кут, якщо плоскі кути $60°$, $90°$, $30°$?
4. Дайте означення многогранного кута.

Білет № 2

1. *Дайте означення лінійного кута двогранного кута.*
2. Дана пряма перетинає площину. Як через цю пряму провести площину, перпендикулярну до даної площини?
3. Чи можна побудувати тригранний кут, маючи плоскі кути $100°$, $100°$ і $150°$?
4. Дайте означення двогранного кута.

Білет № 3

1. Сформулюйте теорему про перпендикуляр, який проведений до однієї з двох взаємно перпендикулярних площин і має спільну точку з другою площиною.
2. Чому величина лінійного кута даного двогранного кута не залежить від того, у якому місці ребра двогранного кута вибрано вершину лінійного кута?
3. Дана точка A лежить на площині α. Як через цю точку провести площину, перпендикулярну до площини α? Скільки розв'язків має задача?
4. Дайте визначення тригранного кута.

Білет № 4

1. Сформулюйте ознаку перпендикулярності площин.

2. На які теореми ми посилаємось, доводячи теорему про властивості плоских кутів тригранного кута?

3. Покажіть у класі лінійний кут двогранного кута, утвореного площиною підлоги і площиною однієї із стін кімнати.

4. Дайте означення взаємно перпендикулярних площин.

Білет № 5

1. Сформулюйте теорему про суму плоских кутів опуклого многогранного кута.

2. Як довести, що з однієї точки, взятої поза площиною, можна на площину опустити лише один перпендикуляр?

3. Яка існує залежність між двогранними і лінійними кутами цих двогранних кутів?

4. Дано: $MABC$ — піраміда; $\triangle ABC$ — прямокутний ($ACB = 90°$); $MA \perp$ пл. ABC. Покажіть лінійний кут двогранного кута, утвореного гранню MBC і основою ABC.

Білет № 6

1. Дано: дві бічні грані SAB і SBC піраміди $SABCD$ перпендикулярні до основи. Покажіть висоту піраміди.

2. Чи можна скласти тригранний кут, маючи плоскі кути 200°, 200° і 250°?

3. Як треба перетнути площиною даний двогранний кут, щоб дістати лінійний кут двогранного кута? Як це довести?

4. Що є мірою двогранного кута?

Білет № 7

1. Чи може існувати правильна шестикутна піраміда, усі бічні грані якої — правильні трикутники?

2. Сформулюйте теорему про лінію перетину двох паралельних площин третьою площиною.

3. На які теореми треба посилатися, коли ми доводимо теорему: «Більшому двогранному куту відповідає більший лінійний кут»?

4. Дана пряма MA перетинає пл. α. На цій прямій узято довільні точки: C, F, K, з яких проведено перпендикуляри до пл. α. Як довести, що ці перпендикуляри усі лежать в одній площині?

Білет № 8

1. Дайте означення грані, ребра і вершини многогранного кута.

2. Довести, що всі точки однієї з двох паралельних площин лежать на однаковій відстані від другої площини.

3. Всередині двогранного кута взято точку. Чи може відстань цієї точки від ребра двогранного кута дорівнювати відстані цієї самої точки від будь-якої грані двогранного кута?

4. Чи може один із плоских кутів многогранного кута дорівнювати 180°?

Білет № 9

1. Сформулюйте теорему про суму всіх плоских кутів в опуклому многогранному куті.

2. З точки, узятої всередині двогранного кута, опущено перпендикуляри на його грані; яка існує залежність між кутом, утвореним цими перпендикулярами і лінійним кутом узятого двогранного кута.

3. Довести, що площина, яка проходить через сторони лінійного кута даного двогранного кута, перпендикулярна до кожної грані цього двогранного кута.

4. Яке найбільше число прямих або тупих плоских кутів може мати опуклий многогранний кут?

Білет № 10

1. Дайте означення суміжних і вертикальних двогранних кутів.

2. Як побудувати двогранний кут за його даним лінійним кутом?

3. Знайти геометричне місце точок, віддалених від однієї грані двогранного кута на відстань a, а від другої на відстань b.

4. Сформулюйте обернену теорему про залежність між двогранними кутами і їх лінійними кутами.

Білет № 11

1. Як перевірити вертикальність стіни? На чому грунтується ця перевірка?

2. До площини кута у 80° проведено через його вершину похилу, проекція якої на площину даного кута є його

бісектрисою. Чи може похила утворити із сторонами даного кута кути 25°, 30°, 40°, 41° тощо?

3. Як побудувати двогранний кут за даним його лінійним кутом?

4. Визначити величину двогранного кута, якщо точка, взята на одній із граней, відстоїть від ребра у два рази далі, ніж від другої грані.

Білет № 12

1. Як перевірити вертикальність стовпа? На чому грунтується перевірка?

2. Чи може плоский кут при основі бічної грані правильної трикутної піраміди дорівнювати 20°, 25°, 30°, 35°?

3. З точки M виходять три промені. У якому випадку ці промені лежатимуть в одній площині?

4. Точка, взята всередині двогранного кута в 60°, віддалена від обох граней на a. Знайти її відстань від ребра.

Білет № 13

1. Дві площини перпендикулярні до третьої площини. Чи перпендикулярні вони одна до одної?

2. Чи може плоский кут при основі бічної грані правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнювати 30°, 35°, 40°, 45°?

3. Чи правильне таке твердження: «Якщо дві площини взаємно перпендикулярні, то будь-яка пряма, проведена в одній з них, перпендикулярна до прямої, що лежить у другій»?

4. Даний двогранний кут поділити пополам.

Білет № 14

1. Що називається кутом прямої з площиною?

2. Якщо площина і пряма перпендикулярні до однієї прямої, то вони паралельні. Довести.

3. На які теореми треба посилатися при доведенні теореми про суму всіх плоских кутів в опуклому многогранному куті?

4. Покажіть у класі тригранний кут.

Наприкінці уроку вчитель узагальнює усю виконану роботу, дає короткий аналіз та характеристику відповідей і доповнень учнів і оцінює кращі з них, дає індивідуальні та групові завдання і поради до заліку.

Під час заліку вільні від підготовки учні уважно слухають відповіді і вносять свої критичні зауваження, відповідають на різні запитання, пояснюють, як вони розв'язали той чи інший приклад у зошиті, поданому до заліку.

Усний залік у формі фронтальної бесіди

Цей тип заліку практикується з метою найбільш широкого залучення учнів до усних відповідей на запитання з вивченої теми. Клас устаткований різними наочними посібниками до залікової теми (моделями, рисунками, графіками, таблицями, плакатами з різними запитаннями і задачами тощо). Учитель заздалегідь складає перелік залікових запитань, задач і прикладів. Запитання і задачі добирають так, щоб підготовка до відповіді на них не вимагала багато часу і щоб учні водночас давали осмислені та обгрунтовані відповіді. Більшу частину дібраних запитань і задач заздалегідь записують на плакатах, діапозитивах до епідіаскопа, переносних дошках з тим, щоб не витрачати часу на їх задавання і неодноразове повторення. Учитель показує на плакаті запитання, на яке треба відповісти, або задачу, яку треба розв'язати. Учні за викликом учителя відповідають на запитання і усно розв'язують задачі. В деяких випадках учні можуть виконувати обчислення на чернетках. При обчисленнях учні користуються логарифмічною лінійкою, таблицями, довідниками. Деякі задачі учні розв'язують на моделях безпосереднім вимірюванням необхідних елементів

На заліках цього типу учитель звертає особливу увагу на тих учнів, які недостатньо працювали в процесі вивчення всієї теми. Їх він найбільше і опитує.

Теоретико-практичний залік *

При цій формі систематизації і контролювання знань, умінь і навичок, яка існує часто на уроках геометрії і тригонометрії, головною метою вчителя є наблизити знання учнів до навчально-виробничої практики, до умов праці на тому виробництві, де старшокласники проходять навчальну практику.

---

* На такому заліку вчитель ставить собі за мету виявити уміння учнів теоретично обгрунтувати практичне застосування відомих технологічних процесів на прикладах навчально-виробничої практики. Такі заліки проводять тоді, коли матеріал, що вивчається, можна широко ілюструвати на прикладах виробництва.

До заліку кожний учень самостійно складає і розв'язує задачу на матеріалі виробничої практики, зв'язаному з темою програми, що вивчається. Так, учень, що набуває спеціальності станочника широкого профілю, складаючи задачу до заліку з теми «Об'єм многогранників», використовує різні технічні деталі призматичної і пірамідальної форми. Кінцевою метою такого залікового завдання може бути, наприклад, обчислення об'єму або ваги деталі. Крім того, учень дає технологічну характеристику деталі, описує її застосування у взаємозв'язку з іншими деталями, робить рисунок цієї деталі.

За два-три дні до заліку учні здають виконану роботу вчителеві. На заліку перевіряються також знання учнями теоретичного матеріалу. Крім того, учитель перед заліком перевіряє розв'язок задач, що були запропоновані до заліку. Ці задачі пропонувалися учням на кожному уроці, як доповнення до обов'язкових домашніх завдань. Оцінку на заліку учитель ставить згідно з оцінками за види робіт, вказаних у таблиці.

Таблиця

№ п.п	Прізвище учня	Оцінка за				Загальна залікова оцінка
		задачі для заліку	задачу, складену на практичному матеріалі	знання теорії	відповіді і доповнення на запитання, поставлені учням, які відповідають	
1	Дзюїн О	4	5	5	5	5

На заліку учитель проводить вибіркову перевірку знань тільки тих учнів, які погано виконали практичну роботу, не розв'язали усіх задач до заліку, недостатньо вчили теоретичний матеріал протягом вивчення теми.

Наводимо приклад практичної роботи учня Д. Кремгесівської школи № 2.

ПРАКТИЧНА РОБОТА

з геометрії учня XI кл середньої школи № 2 м. Кремгеса

Тема. Визначення ваги деталі. У даному випадку береться насадка для різця поздовжньо-стругального верстата.

Технологічні дані. Насадка для різця являє собою пластинку товщиною 10 *мм* і висотою 15 *мм*. Пластинка приварюється до різця площинами *DLKC* і *KLMN* (рис. 56). Ріжуча частина поверхні пластинки 1,5—2 *мм*. Пластинка виготовлена з сплаву Т5К10, що містить 5% карбіду титану (TiC), 10% кобальту (Co) і 85% карбіду вольфраму (W_3C). За хімічним складом сплаву ми бачимо, що це дуже стійкий матеріал, бо карбіди мають дуже велику міцність. Справді, сплав Т5К10 може різати усі метали, починаючи від заліза і кінчаючи легованими сталями і високоміцними чавунами. Сплав Т5К10 зберігає ріжучі властивості при температурі до 800°—1000° С. Негативна якість сплаву Т5К10 в тому, що він досить крихкий, і тому ним не можна різати високоміцних металів на великих швидкостях. Питома вага сплаву ≈ ≈ 42,9 *Г/см*³. Температура плавлення 3120° С. Твердість за Брінелем 281—360.

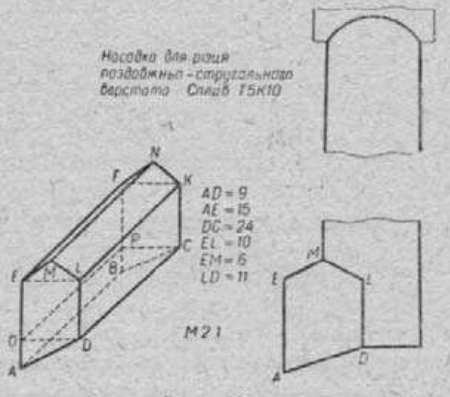


Рис. 56.

Розв'язання. Насадку ділимо на три частини — трикутні призми *EMLFNK* і *AODBPC* і прямокутний паралелепіпед *ELDOFKCP*.

Знаходимо об'єм правильної трикутної призми *EMLFNK*: $V_{пр} = Sh$ (об'єм призми дорівнює добутку площі основи на висоту). Висота *LK* відома, вона дорівнює 24 *мм*, площу основи *S* знайдемо за формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де p — півпериметр;
a, b, c — сторони трикутника.

$$S_{EML} = \sqrt{11 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1} = 5\sqrt{11} \approx 16{,}59 \text{ мм}^2 \approx 16{,}6 \text{ мм}^2;$$

$$V_{1\,пр} = S \cdot h = 16{,}6 \text{ мм}^2 \cdot 24 \text{ мм} \approx 398{,}2 \text{ мм}^3 \approx 400 \text{ мм}^3.$$

Об'єм паралелепіпеда *EODLFKCP* дорівнює добутку трьох вимірів — $OD \cdot DL \cdot DC$. Усі три параметри нам відомі: $OD = 10$ *мм*; $DL = 11$ *мм*; $DC = 24$ *мм*.

$$V_{пар} = OD \cdot DL \cdot DC = 10 \cdot 11 \cdot 24 = 2640 \ (мм^3).$$

Об'єм призми *ODAPCB* також легко знайти. Площа основи призми за формулою Герона дорівнює:

$$S = \sqrt{11{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 7{,}5} \approx 17{,}99 \ (мм^2) \approx 18 \ мм^2;$$

$$V_{2\,пр} = S \cdot h = 17{,}99 \ мм^2 \cdot 24 \ мм \approx 431{,}76 \ мм^3 \approx 432 \ мм^3;$$

$$V_{общ} = V_{1\,пар} + V_{пар} + V_{2\,пр} \approx 398{,}0 \ мм^3 + 2640 \ мм^3 + \\ + 432 \ мм^3 \approx 3470 \ мм^3 \approx 3500 \ мм^3 \approx 3{,}5 \ см^3.$$

Вагу тіла, якщо відомі його питома вага і об'єм, визначаємо за формулою:

$$P = D \cdot V = 42{,}9 \ Г/см^3 \cdot 3{,}5 \ см^3 \approx 150 \ г$$

Вага насадки дорівнює 150 *Г*.

Залежно від змісту програмного матеріалу і підготовки учнів учитель використовує той або інший вид заліку.

Наведені приклади не вичерпують усіх видів заліку, що їх застосовують учителі. Творче застосування різних видів заліків оживляє навчальний процес, сприяє підвищенню інтересу до знань, вносить свіжу струмину у процес навчання.

Письмові контрольні роботи

Письмовий контрольний урок — форма занять, що передбачає перевірку знань, умінь і практичних навичок учнів з вивченої теми або розділу програми шляхом виконання письмової роботи.

Якщо контрольну роботу проводять до заліку, тоді, як показує досвід, у залікові білети не слід включати задачі або приклади. Залік з теми в цьому випадку проводять тільки з теорії, а залікову оцінку виставляють на основі усної відповіді і наслідків контрольної роботи. Учні, які за контрольну роботу дістали двійки, крім відповіді на теоретичне питання, повинні на заліку додатково розв'язати задачу або приклад. Раніше вчителі не допускали до заліку тих учнів, які не виконали контрольної роботи. Така практика не виправдала себе, бо учні, не готуючись до заліку, розхо-

лоджувалися. Допускаючи ж їх до заліку, вчителі сприяють тому, що вони продовжують вивчати теорію і розв'язувати задачі та вправи. Дуже часто такі учні успішно складають залік.

Звичайно, результати контрольної роботи треба повідомляти класові на наступний день з тим, щоб учні, які дістали двійки, могли використати усі дні, що залишилися для підготовки до заліку. Досвід показав, що багато з тих, хто дістав за контрольну роботу «3» і «4», намагаються підвищити оцінку на заліку. Відповівши на теоретичне запитання залікової картки, вони просять дати їм для розв'язування задачу або приклад. У зв'язку з цим учитель повинен підготувати до заліку ще й диференційовані завдання для цих учнів. Багато з них дійсно підвищує свою залікову оцінку за рахунок успішного виконання практичного завдання.

Тексти контрольних робіт учитель обов'язково бере на залік з тим, щоб проаналізувати їх індивідуально з кожним учнем, виявити знання старшокласника з тих питань, які він раніше погано засвоїв. Коли контрольну роботу проводять після заліку, учні мають можливість підготуватися до неї більш грунтовно.

Як показав досвід, контрольну роботу проводити після заліку недоцільно тому, що, по-перше, аналіз контрольних робіт учнів і узагальнення наслідків контрольно-залікових уроків треба переносити на третій урок, запланований для вивчення нового матеріалу наступної теми. По-друге, учні, які дістали двійки за контрольні роботи, уже не мали можливості виправити їх на заліку, а повинні були робити це в позаурочний час. По-третє, окремі учні не могли підвищити і свою загальну залікову оцінку. По-четверте, учні, які дістали незадовільні оцінки, без попереднього усунення виявлених недоліків у знаннях приступають до вивчення нової теми, яка часто буває зв'язана з попередньою.

Як на уроках тренувальних вправ, так і на контрольній роботі учням пропонують завдання у трьох варіантах за ступенями трудності: I, II і III ступінь трудності, які відповідно оцінюються балами «3», «4» і «5».

Для досягнення самостійності в роботі учнів учитель готує 3 пари завдань: два різних (але однакових за трудністю) завдання першого ступеня, два різних (але також однакових за трудністю) завдання другого ступеня і два рівносильні завдання третього ступеня. Кожному учневі

надається право вибирати будь-який посильний для нього варіант завдання. Під час вибору завдання учні повинні дотримуватися схеми № 1. Учні, які сидять у першому ряду, вибирають будь-який з трьох варіантів: I, II або III.

Схема № 1

I ряд	II ряд
I варіант	I′ варіант
II варіант	II′ варіант
III варіант	III′ варіант

Той, хто сидить у другому ряду, вибирає будь-який з трьох варіантів завдання: I′, II′, III′. У тому самому порядку і далі повторюються ті самі варіанти для I і II рядів. Така схема розподілу рівнозначних завдань I—I′, II—II′, III—III′ виключає можливість списування готового розв'язку у товариша, що сидить поруч. Раніше, коли вчитель пропонував тільки три варіанти задач або вправ, були випадки, коли двоє учнів, які сиділи поруч, розв'язували одну й ту саму задачу I, II чи III варіанта.

Запропонована схема розподілу контрольних завдань виключає такі випадки.

Перевіряючи вдома письмові контрольно-залікові роботи, учитель записує на окремих картках запитання, що стосуються помилок, припущених учнем, і вкладає картку в його контрольну роботу. На заліку вчитель обов'язково звертається до контрольних робіт учнів, що припустили помилки, повертає їм роботи з картками і пропонує відповісти на запитання, записані в них. З відповідей учня на запитання учитель робить певні висновки про ступінь самостійності під час виконання контрольного завдання, виявляє причини припущених помилок і, отже, встановлює об'єктивний рівень його знань з математики.

Можна і не писати карток із запитаннями, а повертати роботу з підкресленими помилками. Таким чином учитель проводить аналіз контрольних робіт індивідуально з кожним учнем, а не з усіма одночасно. Індивідуальний аналіз контрольних робіт дає можливість не тільки глибше виявити недоліки, прогалини в знаннях кожного учня, а й своєчасно подати йому конкретну допомогу щодо їх ліквідації.

Заліки внесли справжню трудову атмосферу в життя старшокласників і вимагають від них великої систематичної

праці, відповідальності за навчання. В міру того як учителі перебудовували структуру кожного типу уроку, оволодівали більш ефективними методами викладання і організації уроків, якість знань, умінь і навичок старшокласників підвищувалась, а їх інтерес до предмета помітно зростав. Ефективність залікових занять підвищувалася разом з підвищенням продуктивності всіх типів уроків, разом з підвищенням успішності учнів з математики. Заліки, як і інші типи уроків (підготовчі, семінари), провадяться не з кожної теми, а вибірково, виходячи з найбільшої доцільності.

КОНТРОЛЮВАННЯ ЗНАНЬ УЧНІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗАПРОГРАМОВАНИХ КАРТОК

У спеціальних картках для програмованого контролю знань, виготовлених у вигляді плаката і вивішених на класній дошці, ставиться ряд запитань і дається кілька відповідей, із яких треба вибрати правильну.

Починаючи експериментальну роботу, ми пропонували такі картки кожному учневі. Але вчителю важко їх виготовити. Зараз складаються два однотипних варіанти карток-плакатів для вивішування на класній дошці з завданнями для лівого і правого рядів учнів. Кожний же учень одержує картку відповідного варіанта.

Ці учнівські картки використовуються для відповідей на запитання, які вказані на картках-плакатах. Положення кожної кліточки учнівської картки визначається перетином прямих, які проводяться від однієї з латинських букв зверху вниз і зліва направо від однієї з арабських цифр.

Учень повинен вибрати на картці-плакаті одну із відповідей, яку він вважає правильною, і, знайшовши на своїй картці кліточку, що відповідає порядковому номеру запитання (арабська цифра зліва) і порядковому номеру вибраної відповіді (латинська буква), робить в цій кліточці відмітку хрестиком чи іншим знаком. Заповнені картки учні повертають учителю.

Для себе вчитель готує із картону чи пластмаси картку за такою ж формою і розмірами, як і учнівські, але з вирізаними в кліточках круглими отворами. (Отвори робляться діроколом). Розробляючи запитання і відповіді, вчитель відмічає квадратами (або інакше) навколо круглих вирізів правильні відповіді у відповідних кліточках своєї картки. Наклавши потім останню (з правильними відповідями) на заповнену учнівську картку, вчитель легко і швидко визначає, наскільки правильно відповів учень на всі запитання.

Таким чином, картка вчителя з вирізаними отворами в кліточках виконує роль коду чи ключа для перевірки пра-

вильності учнівських відповідей. Збіг всіх відповідей (тобто хрестиків) з відмітками (квадратами навколо вирізів) в картці вчителя означає, що учень правильно відповів на всі запитання (див. таблицю, де відповіді учнів відмічені хрестиком, а правильні відповіді на картці вчителя — квадратами).

Відповідь / Запитання	a	b	c	d	e
1	○	⊞	○	○	○
2	○	○	○	⊞	○
3	○	○	⊞	○	○
4	○	⊞	○	○	○
5	○	⊞	○	○	○
6	⊞	○	○	○	○
7	⊞	⊞	○	○	○
8	○	⊞	⊞	○	○
9	⊞	○	⊞	○	○
10	○	○	⊞	○	⊞

Відповідь / Запитання	a	b	c	d	e
1	○	⊞	○	○	○
2	○	○	○	⊡	○
3	○	○	⊡	○	○
4	○	⊞	○	○	○
5	○	⊡	○	○	○
6	⊞	○	○	○	○
7	⊞	⊞	○	○	○
8	○	⊞	⊞	○	○
9	⊞	○	⊞	○	○
10	○	○	⊡	○	⊡

При деякому неспівпаданні знаків учитель бачить, на які запитання учень не дав правильної відповіді. При накладанні карток видно, що учень неправильно відповів на друге, третє, п'яте й десяте запитання (знак «+» і «□» не співпали).

Може статися, що на ці ж запитання чи на одно із них не відповість більшість учнів. У цьому випадку вину на себе повинен взяти вчитель і обов'язково розібрати їх повторно з тим, щоб у знаннях учнів не залишалось прогалин. Відповіді всіх учнів учитель перевіряє тут же на уроці, робить зауваження тим, хто неправильно відповів на ті чи інші запитання, коментує відповіді з участю всього класу. Вчитель задає ці ж запитання або додаткові і тим учням, хто дав правильні відповіді на контрольні запитання картки. Цим ще раз перевіряється справжній рівень їх знань, виключаються можливі сумніви у самого вчителя, підвищується можливість визначення самостійності при виконанні завдання кожним учнем, підвищуються і вимоги до виконання домашніх завдань, до навчання взагалі.

Відповіді учнів учитель оцінює. При цьому він враховує кількість правильних відповідей, складність запитань, на які учень відповів правильно, відповіді учнів на ці ж або на додаткові запитання, задані в усній формі. Учнівські

картки вчитель зберігає. Програмоване контролювання знань не виключає інших форм перевірки знань, а лише їх доповнює.

У картці може бути до десяти запитань. Кількість можливих відповідей на кожне запитання може бути різна. Доцільно давати на деякі запитання картки не одну, а дві можливі правильні відповіді, цим активізується робота класу, підвищуються вимоги до знань учнів, знижується ймовірність випадкових правильних відповідей.

За допомогою карток можна контролювати не тільки знання з теоретичного курсу, а й практичні уміння і навички учнів при розв'язуванні задач і прикладів. З цією метою в картку заносяться послідовно всі ті запитання, відповіді на які приводять до розв'язку задачі чи прикладу. Причому на окремі запитання можна давати по кілька правильних відповідей. В одній і тій же картці може бути поставлено максимум і мінімум запитань до даної задачі чи прикладу (в залежності від способів їх розв'язування), які приводять до правильної відповіді.

Всі картки з одержаними відповідями разом з іншими результатами поточної діяльності учнів учитель використовує перед заліками для підведення підсумків роботи кожного учня по всій темі (розділу). Він аналізує як слабкі, так і сильні сторони в знаннях кожного учня і враховує їх на заліку.

Така система перевірки знань дає можливість здійснювати самоконтроль і контроль з найменшою затратою часу, створити резерв часу для підвищення якості навчально-виховної роботи на всіх уроках.

Приклади карток для контролювання знань учнів

До кожного з восьми запитань картки № 1 в пунктах а, б, в, г наведені відповіді.

Користуючись карткою, визначити, яка з відповідей є правильною. Якщо ви вважаєте, наприклад, що правильна відповідь на друге запитання дана в пункті а, то ви повинні в картці поставити знак «+» на перетині другого рядка і стовпчика а.

Якщо учень дав правильну відповідь на всі вісім запитань, то картка № 1 має такий вигляд:

Картка № 1

Відповіді / Запитання	а	б	в	г	д
1				+	
2	+				
3		+			
4		+	+		
5	+		+		
6	+			+	
7	+	+	+		
8	+	+	+		

На рисунку 57 зображена правильна піраміда $MABCD$. Відповісти на запитання, користуючись цим рисунком.

1. Якими будуть прямі OM і CD: а) паралельними; б) мимобіжними; в) що перетинаються; г) перпендикулярними.

2. Як розташована пряма CD по відношенню до площини AMB: а) паралельно; б) перпендикулярно; в) похило.

3. Як розташована площина KME по відношенню до площин ABM і DMC: а) паралельно; б) перпендикулярно; в) перетинає її під гострим кутом; г) не перетинає її.

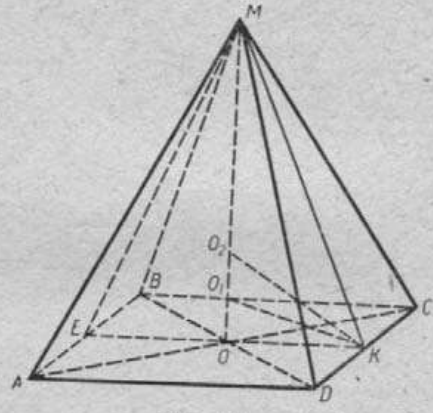


Рис. 57.

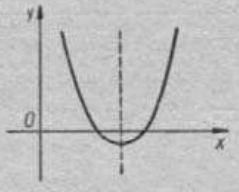
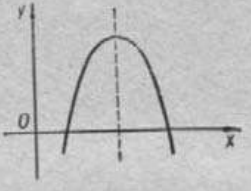
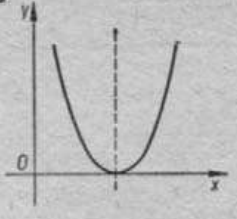
4. Вкажіть прямі, які утворюють між собою прямий кут: а) O_1K і AB; б) DC і AM; в) O_2K і DC; г) MC і AD.

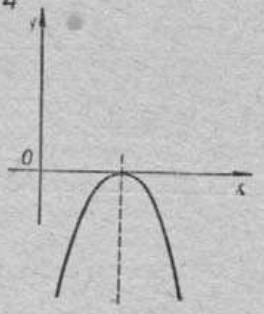
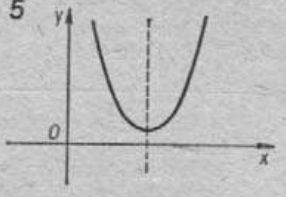
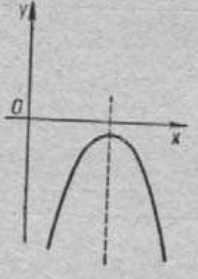
5. Вкажіть пряму і площину, які утворюють гострий кут: а) CM і MBD; б) AM і ACM; в) CD і MEK; г) OM і AMD.

6. Вкажіть пряму і площину, які будуть перпендикулярними: а) CD і O_2OK; б) O_1K і DMC; в) MO і $ABCD$; г) BM і ABC.

7. Вкажіть дві площини, які утворюють прямий кут: а) AMC і BMC; б) MKE і DMC; в) BMD і $ABCD$; г) AMD і DMC.

Картка № 2

Дослідження квадратного тричлена	Відповідь
Якому знаку коефіцієнта a і значенню дискримінанта $b^2 - 4ac$ відповідають зображені графіки функції: $y = ax^2 + bx + c$?	
1 	А $b^2 - 4ac = 0$ Б $b^2 - 4ac > 0$ В $a < 0$ Г $a = 0$ Д $a > 0$
2 	А $b^2 - 4ac < 0$ Б $b^2 - 4ac = 0$ В $b^2 - 4ac > 0$ Г $a < 0$ Д $a = 0$
3 	А $a > 0$ Б $a < 0$ В $b^2 - 4ac = 0$ Г $b^2 - 4ac > 0$ Д $b^2 - 4ac < 0$

Дослідження квадратного тричлена	Відповідь
4 	А $a > 0$ Б $b^2 - 4ac = 0$ В $b^2 - 4ac > 0$ Г $a < 0$ Д $a = 0$
5 	А $a > 0$ Б $b^2 - 4ac > 0$ В $b^2 - 4ac = 0$ Г $a = 0$ Д $b^2 - 4ac < 0$
6 	А $a = 0$ Б $b^2 - 4ac < 0$ В $a > 0$ Г $a < 0$ Д $b^2 - 4ac = 0$

Використовуючи графіки функції $y = ax^2 + bx + c$, встановити:	Відповідь
1. Область визначення	А $0 \leqslant x \leqslant \infty$ Б $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$ В $-\infty \leqslant x \leqslant 0$ Г $a \leqslant x \leqslant b$ Д $b \leqslant x \leqslant a$
2. **Корені функції** Якщо $b^2 - 4ac > 0$	А Множина коренів Б Немає коренів В Один корінь Г Два корені
3. Якщо $b^2 - 4ac = 0$	А Множина коренів Б Немає коренів В Один корінь Г Два корені
4. Якщо $b^2 - 4ac < 0$	А Множина коренів Б Немає коренів В Один корінь Г Два корені
5. **Область знакосталості:** Для значень аргументу, які лежать між коренями (якщо вони є), функція має знак:	А Співпадає з знаком коефіцієнта a Б Протилежний знаку коефіцієнта a В Співпадає з знаком коефіцієнта b Г Протилежний знаку коефіцієнта b
6. Для решти значень аргументу (крім коренів) функція має знак:	А Співпадає з знаком коефіцієнта a Б Протилежні знаку коефіцієнта a В Співпадає з знаком коефіцієнта b Г Протилежний знаку коефіцієнта b
7. Монотонність: При якій умові і в якому інтервалі функція $y = ax^2 + bx + c$ спадає:	А a 0 Б $a < 0$ В $x > -\frac{b}{2a}$

Використовуючи графіки функції $y = ax^2 + bx + c$, встановити:	Відповідь
	Г $x < -\frac{b}{2a}$ Д $x = -\frac{b}{2a}$
8. Зростає.	А $a > 0$ Б $a < 0$ В $x > -\frac{b}{2a}$ Г $x < -\frac{b}{2a}$ Д $x = -\frac{b}{2a}$
9. Максимум і мінімум. Квадратна функція має мінімум при:	А $x = -\frac{b}{2a}$ Б $x < -\frac{b}{2a}$ В $x > -\frac{b}{2a}$ Г $a > 0$ Д $a < 0$
10. Квадратна функція має максимум при:	А $x > -\frac{b}{2a}$ Б $x = +\frac{b}{2a}$ В $x = -\frac{b}{2a}$ Г $a > 0$ Д $a < 0$

О. Хмура № 6839

§ 8. ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ І ПОТОЧНИЙ ОБЛІК ЗНАНЬ ПРИ НОВІЙ ОРГАНІЗАЦІЇ УРОКІВ У СТАРШИХ КЛАСАХ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

Самостійне виконання учнями домашніх завдань з математики є логічним продовженням їх навчальної діяльності в класі і має на меті дальше поглиблення, зміцнення і розширення набутих на уроці знань. Тільки найбільш підготовленим учням пропонують іноді домашні завдання, що передбачають вивчення нового матеріалу. Результати експериментальної роботи в школах області показали, що без організації на кожному уроці навчальної самостійної роботи не можна досягти позитивних результатів у виконанні домашньої самостійної роботи, не можна взагалі її давати. Задовільні результати домашніх самостійних робіт можливі лише при наявності і ефективній організації відповідних класних самостійних робіт.

Успіх виконання учнями домашніх завдань перебуває в прямій залежності від якості шкільних занять, ефективності колективної і самостійної діяльності учнів у класі, глибини і міцності засвоєння ними знань і умінь на уроці.

Між домашніми і класними самостійними роботами повинна існувати взаємно однозначна відповідність, тобто кожній заданій додому самостійній роботі повинна відповідати попередня робота в класі. Нова організація уроків з математики дає змогу систематично здійснювати відповідність між класними і домашніми самостійними роботами. І на уроках пояснення нового матеріалу (здвоєні уроки) і на уроках тренувальних вправ створюються умови для проведення самостійних занять учнів та підготовки їх до самостійного виконання домашньої роботи.

Самостійна робота на уроці дає змогу вчителеві правильно визначити посильне для учнів домашнє завдання і, отже, попередити перевантаження домашніми завданнями. Видатний російський критик і публіцист Д. І. Писарєв писав: «Треба, щоб кожний крок вперед діставався учневі після

важкої боротьби і щоб у той же час ця важка боротьба не перевищувала розмірів його наявних сил. При таких умовах математичні заняття даватимуть учням відчуття справжньої боротьби. Учень сміливо підходитиме до кожної нової трудності, з натхненням працюватиме над її засвоєнням і, діставши над нею перемогу, винесе з цієї перемоги новий запас сил і енергії. Діючи таким чином, учень з молодих років навчиться розуміти і відчувати ту велику істину, що суворо втомлююча праця дає людині високу насолоду, якщо тільки вона не доходить до таких крайніх розмірів, при яких вона може підривати фізичні і розумові сили людського організму» *.

Самостійна робота в класі, що передує виконанню учнями домашнього завдання, передбачає максимальне прикладання ними фізичних і розумових сил з тим, щоб на уроці, а не вдома розв'язати всі ті труднощі у засвоєнні нових знань і умінь, які можуть виникнути при виконанні домашнього завдання і які перевищують розумові сили учня.

Види домашніх завдань

Одним з найбільш поширених видів домашнього завдання є робота над текстом стабільного підручника. Робота над підручником сприяє не тільки відновленню в пам'яті і додатковому закріпленню матеріалу, засвоєного на уроці, відтворенню його в усній або письмовій формі, а й набуванню умінь самостійно мислити, навичок самостійного навчання, критичного і творчого засвоєння знань, поглиблення і зміцнення цих знань, виробленню своїх поглядів і переконань. У старших класах практикуються також завдання, які вимагають вивчення певних питань з додаткової літератури. Найчастіше такі завдання пропонують до уроків-семінарів.

Працюючи над додатковою літературою, учні вчаться самостійно, творчо працювати, переборювати труднощі у досягненні поставленої мети, оволодівають елементами культури розумової праці, поглиблюють і розширюють свої знання.

Практика роботи в старших класах показала, що обмежувати учнів тільки стабільною навчальною літературою

---

* Д. И. Писарев. Избранные педагогические сочинения, М., Учпедгиз, 1951, стор. 269.

не можна. Навчання, яке здійснюється тільки за шкільними підручниками, ізолює учнів від життя.

При новій організації уроків нерідко практикується і такий вид домашніх завдань, як самостійне вивчення учнями нового матеріалу за підручником або вказаним учителем навчальним посібником. Практика показала, що на перших порах такий вид завдання посильний тільки для найбільш підготовлених старшокласників, а з часом з ним успішно справляються й інші.

Поряд з роботою над текстом підручника або додаткової літератури практикуються завдання: виконання різних письмових тренувальних і контрольних вправ і розв'язування задач із стабільних та інших збірників задач.

Важлива роль у навчанні учнів належить завданням навчально-практичного, експериментального характеру.

До таких видів домашніх робіт належать:

1) виготовлення різних наочних навчальних посібників (графіків, діаграм, таблиць, рисунків, моделей тощо);

2) складання задач практичного змісту на матеріалі навчально-виробничої практики, проведених екскурсій, спостережень, участі в громадсько-корисній праці тощо;

3) експериментальна перевірка деяких математичних тверджень.

Такого виду домашні завдання збагачують знання і життєвий досвід учнів, розвивають їх ініціативу, творчість і здібності, сприяють кращому засвоєнню нових знань.

Одними з важливих видів домашніх завдань є математичні твори, реферати, доповіді до семінарських занять. Теми для цього виду домашніх робіт визначаються характером вивченого матеріалу, який виноситься на семінарські заняття. Тематика питань до семінарських занять передбачає часто не тільки знання програмного матеріалу, а й знання питань, що виходять за межі програми. Над цими питаннями працюють в основному найбільш підготовлені учні, кількість яких з кожним роком збільшується.

Практикується також написання протягом навчального року 1—2 рефератів кожним учнем, в яких узагальнюється матеріал не з питань будь-якої однієї вивченої теми, а вивченого в кількох класах. Такими темами можуть, наприклад, бути:

1. Чотирикутники.
2. Трикутники.

3. Властивості вписаних у коло і описаних навколо нього трикутників і чотирикутників.
4. Площі геометричних фігур.
5. Многогранники.
6. Круглі тіла.
7. Нерівності в математиці.
8. Функції і графіки в математиці.
9. Розвиток поняття про число.
10. Розв'язування задач на доведення.
11. Розв'язування задач на побудову і багато інших.

У зв'язку з підготовчими уроками практикуються також і такі види домашніх завдань, які передбачають і повторення всіх тих питань, які вивчалися раніше і які необхідні при вивченні нової теми, а також розв'язування відповідних задач і прикладів, виготовлення різних наочних посібників. Із введенням підготовчих уроків учням старших класів пропонується і такий вид домашніх завдань, як оригінальне доведення теорем і виведення формул, вивчених у попередніх класах, на основі знань, набутих у наступних класах, розв'язування задач за минулі роки із застосуванням набутих знань тощо.

У зв'язку з підготовкою учнів до семінарських занять домашнім завданням може бути доведення нових теорем. Як правило, ці завдання формулює вчитель у вигляді задач на доведення. Наприклад:

1. Довести, що площа проекції дорівнює добутку площі проектованої фігури на косинус кута нахилу.

2. На основі теореми синусів довести, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорціональні прилеглим сторонам трикутника.

3. $S_{біч} = \frac{Q}{\cos \alpha}$;

$$S = Q \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$

де S — площа поверхні піраміди;
Q — площа основи;
α — кут нахилу бічних граней піраміди до площини основи.

4. $S_{повн} = \frac{2S_{осн} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$,

де $S_{повн}$ — повна поверхня піраміди, у якої всі бічні грані однаково нахилені до площини основи;

$S_{осн}$ — площа основи;

α — кут нахилу бічної грані до основи.

5. Формула Сімпсона для обчислення об'єму призми, піраміди, зрізаної піраміди, циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі:

$$V = \frac{H}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3)$$

де H — висота тіла;

B_1 — площа нижньої основи;

B_2 — площа середнього перерізу;

B_3 — площа верхньої основи.

6. Формула Муавра.

7. Формули для обчислення площі трикутника;

$$S = \frac{abc}{4R}; \quad r = \frac{S}{p}.$$

$$S = p^2 \operatorname{tg}\frac{A}{2} \operatorname{tg}\frac{B}{2} \operatorname{tg}\frac{G}{2};$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

8. $V_к = \frac{1}{3} S_к \cdot R,$

де $V_к$ — об'єм конуса;

$S_к$ — повна поверхня конуса;

R — радіус вписаної в неї кулі тощо.

Практикуються і такі види домашніх завдань, у яких треба скласти план доведення вивчених теорем, вивести формули, перелічити вивчені питання з короткими письмовими відповідями на них, в письмовій формі викласти відповіді на окремі найважливіші, вузлові питання до семінарів і заліків.

Одним із видів домашнього завдання є лабораторні роботи. Учням, наприклад, пропонується виготовити один із видів многогранників і безпосереднім вимірюванням обчислити його поверхню або об'єм. Або, наприклад, при вивченні теми «Розв'язування прямокутних трикутників» учнів ознайомлюють з принципами обчислень і вимірювань, які застосовуються на виробництві. І тут, крім класних лабораторних робіт, їм пропонують вдома, наприклад, визначити зовнішній діаметр великої деталі за виміряною дугою

і вписаним кутом, що спирається на цю дугу, тощо. (Вимірювальні прилади учні беруть у школі або на виробництві).

Іноді після проведення контрольних робіт учням пропонують домашню роботу на виправлення припущених помилок, а перед проведенням заліків — на виправлення помилок, які вони припустили при розв'язуванні задач по заліковій темі. Вчитель перед цим перевіряє зошити учнів. Буває і так, що вчитель пропонує учням перевірити зошити із заліковими задачами своїх товаришів.

Важливим видом домашніх завдань є розв'язування учнями 1—2 задач з геометрії із застосуванням тригонометрії (на чверть) з повним поясненням і обчисленням, виконанням креслень і рисунків, виготовленням моделі до задачі.

Види домашніх завдань залежать від багатьох факторів, зокрема від характеру вивченого матеріалу, особливостей його застосування, компетентності самого вчителя, уміння учнів систематично і самостійно працювати, рівня їх знань і загального культурного розвитку. Виходячи з конкретних умов класу кожної школи, вид домашніх завдань визначає сам учитель.

Дослід показав, що в старших класах можна практикувати як поурочні на кожному уроці, так і тематичні домашні завдання.

Тематичні домашні завдання сприяють тому, що старшокласники привчаються правильно розподіляти свій робочий час, виявляти більше самостійності при вивченні нового матеріалу в класі і вдома.

Повідомляючи тему уроку, вчитель записує (або усно вказує) параграф за підручником, номери задач або вправ, виділяючи відповідним чином ті, що намічені для розв'язування в класі, та окремо ті, що їх слід розв'язати вдома. На всі труднощі, зв'язані з виконанням домашнього завдання, увага учнів звертається при вивченні і закріпленні нового матеріалу, виконанні самостійної роботи. На уроках тренувальних вправ класні диференційовані завдання II і III ступенів трудності, разом з додатковими завданнями, є і домашніми. Для тих учнів, які на уроці виконали завдання першого ступеня трудності (на оцінку «3»), домашнім завданням має бути вже доступне для них завдання другого ступеня трудності (на оцінку «4»); для тих, хто справився з роботою другого ступеня трудності, домашнім завданням має бути завдання третього ступеня трудності (на оцінку

«5»), а той, хто справився із завданням третього ступеня трудності, виконує вдома (або в класі) додаткове завдання. Схематично домашнє завдання для класу найкраще записувати так: I → II → III → не обов'язкове додаткове завдання.

Якщо, наприклад, на уроці розв'язували такі задачі на обчислення об'єму піраміди:

I ступінь трудності: збірник задач Н. Рибкіна, ч. II, § 17, № 15.	II ступінь трудності: збірник задач Н. Рибкіна, ч. II, § 17, № 17 (2), № 23.	III ступінь трудності: збірник задач П. В. Стратілатова, № 415, 416.

Додаткове завдання: № 417 із збірника задач П. В. Стратілатова; домашнє завдання ми записуємо так: I → II → → III → 417. (Значення цього схематичного запису учні знають).

Часто буває так, що вже на самому уроці більшість учнів виконує домашнє завдання. Тому вдома вони продовжують працювати над закінченням розпочатого в класі домашнього завдання. Робота над домашнім завданням завжди починається на уроці.

Організована так робота в класі багато в чому підвищує якість виконання домашніх завдань, попереджує перевантаження учнів, скорочує час на його виконання.

Перевірка виконання домашнього завдання, органічно зв'язана з поточною перевіркою знань учнів, має багато різних форм. Спинимось на них докладніше.

Фронтальна перевірка

Ця форма перевірки найдоцільніша при завданнях, спільних для усього класу, коли задачі складні, з великими перетвореннями, складними рисунками тощо. Черговий учень до початку уроку будує рисунок на дошці (рисунок можна демонструвати і за допомогою епідіаскопа або готового плаката).

Розв'язок задачі перевіряють по найбільш вузлових питаннях задачі без докладного розгляду етапів розв'язування.

Одночасно з фронтальною перевіркою домашнього завдання вчитель за допомогою відповідно дібраних запитань перевіряє учнів, як вони засвоїли виучуваний матеріал. Вивчаючи, наприклад, об'єм похилого паралелепіпеда, учи-

тель під час фронтального опитування звертає увагу учнів на такі питання:

1. Скласти план доведення теореми про об'єм паралелепіпеда.

2. Довести, що у перпендикулярному перерізі паралелепіпеда утворився паралелограм (рисунок зображено на переносній дошці або плакаті).

3. Довести, що висота паралелепіпеда є висотою його бічної грані (паралелограма).

При вивченні властивостей логарифмічної функції розглядаються такі питання:

1. Чи має показникова функція $y = a^x (a > o,\ a \neq 1)$ обернену функцію? Відповідь обгрунтувати.

2. Яка область визначення і область значень логарифмічної функції?

3. Які з перелічених нижче функцій зростаючі, а які спадні: $y = \log_3 x$; $y = \log_{0,1} x$; $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; $y = \lg x$?

4. Через яку точку проходять графіки всіх логарифмічних функцій?

5. Як розміщені один відносно одного графіки таких функцій:

$$y = \log_3 x \quad \text{і} \quad y = \lg x;$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad \text{і} \quad y = \log_{0,1} x?$$

6. Як позначається функція, обернена до показникової функції: $y = e^x$? Порівняти графіки цієї функції з графіками функцій:

$$y = \lg x \quad \text{і} \quad y = \log_2 x.$$

7. Як розміщені один відносно одного графіки таких функцій:

$$y = \log_3 x \quad \text{і} \quad y = \log_{\frac{1}{3}} x;$$

$$y = \log_5 x \quad \text{і} \quad y = \log_{\frac{1}{5}} x?$$

8. Для яких значень x у множині дійсних чисел мають смисл такі вирази:

$$\lg x;\ \lg(-x);\ \lg(x+1);\ \lg(1-x);\ \lg\lg x;\ \lg\sin x;$$

$$a^{\sqrt{x}};\ \frac{1}{\lg x};\ \lg|x|;\ \sqrt{\lg x}?$$

Такі запитання «на міркування» дають можливість при мінімальній затраті навчального часу не тільки перевірити знання учнів, а й поглибити їх.

Організуючи фронтальне опитування, вчителі особливу увагу відводять питанням, які розкривають практичне застосування вивченого матеріалу, бо, відповідаючи, учні одночасно показують і своє знання теорії. Краще, наприклад, учневі дати просту задачу на усне обчислення об'єму піраміди, ніж запитати про формулу об'єму піраміди, бо в першому випадку вчитель виявляє не тільки знання теорії, а й уміння застосовувати її на практиці.

Перевірка домашнього завдання на матеріалі, подібному до того, над яким учні працювали вдома
(не більше 10—12 *хв*)

Така форма перевірки домашнього завдання дає змогу поєднати навчання з перевіркою знань.

Наприклад, після вивчення в IX класі теми «Визначення границі змінної величини» учням було задано додому приклади на знаходження границі змінної величини на основі означення границі. На наступному уроці замість перевірки їх розв'язування учням пропонують аналогічний приклад: довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n}=4;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5n}{n^2+4n+3}=2.$$

Учні самостійно в зошитах доводять, а учитель індивідуально (а не колективно) перевіряє домашнє завдання і виконання завдання на доведення, подаючи, коли це потрібно, індивідуальну допомогу. Під час фронтальної бесіди встановлюється, наскільки глибоко і свідомо учні засвоїли такі поняття, як обмежена змінна величина, означення границі змінної, геометричне тлумачення поняття границі змінної величини тощо.

Перевірка домашнього завдання в процесі вивчення і закріплення нового матеріалу

Якщо новий матеріал зв'язаний з багатьма питаннями, вивченими раніше, і домашнє завдання мало на меті повторити матеріал, потрібний для засвоєння нового матеріалу на наступному уроці, тоді перевірку домашнього завдання доцільно об'єднати з вивченням і закріпленням нового матеріалу.

Наприклад, перед вивченням теми «Знаходження остачі і частки під час ділення цілого відносно x многочлена на двочлен $(x - a)$» учителька Н. Ф. Лега з Маловисківської школи № 4 запропонувала учням повторити до наступного уроку ділення многочлена на многочлен. У класі не відводився окремо час на перевірку цього завдання, воно перевірялося в процесі пояснення нового матеріалу і його закріплення. (Приклад перевірки домашнього завдання таким способом *див. у розділі «Уроки вивчення нового матеріалу»*).

Перевірка домашнього завдання способом самостійного розв'язування задач або прикладів на початку уроку

Короткий запис змісту завдань і рисунки до них учитель готує заздалегідь. (Можна виготовити діапозитиви і демонструвати через епідіаскоп).

Так, урок тренувальних вправ з теми «Довжина дуги в $n°$» деякі вчителі починають з усного розв'язування задач з плакатів.

Розв'язуються задачі:

1. За даною хордою a визначити довжину її дуги, якщо вона має: а) 60°; б) 90° і в) 120°.

2. За даною довжиною дуги l визначити її хорду, якщо дуга має: а) 60°; б) 90° і в) 120°.

До цих задач використовують один і той самий плакат або набір діапозитивів. Перед розв'язуванням задач повторюють формули для знаходження сторони правильного трикутника, квадрата, правильного шестикутника через радіус описаного кола і формулу для обчислення радіуса описаного кола через сторони правильного трикутника, квадрата, правильного шестикутника. За 7 *хв* у класі розв'язується фактично шість задач. При цьому повторюється матеріал попереднього розділу і закріплюється матеріал з вивченої теми, перевіряються знання учнів.

Індивідуальна перевірка домашнього завдання вчителем на уроках тренувальних вправ

Уроки такого типу дають широкі можливості для перевірки виконання домашнього завдання, поточної перевірки і обліку знань, навичок і умінь учнів в процесі різних видів самостійних робіт. На уроках тренувальних вправ учитель має можливість не тільки індивідуально працювати з

кожним учнем, а й контролювати їх знання, і не тільки з матеріалу попередніх уроків, а й за кілька років навчання в школі.

Взаємоперевірка домашнього завдання самими учнями

Учитель називає попарно прізвища учнів, які повинні обмінятися зошитами з домашніми завданнями, перевірити і здати зошити вчителеві на перевірку. Для цього виділяється на початку уроку 5—7 *хв*

Вибіркова перевірка домашнього завдання

Учитель періодично на початку або наприкінці уроку пропонує 3—5 учням здати зошити для перевірки.

Перевірка домашнього завдання в письмовій формі

На початку уроку вчитель пропонує усім учням або індивідуально кожному довести в зошитах чи на окремих аркушах теорему або вивести формулу. На цю роботу виділяється не більше 10 *хв*. Крім того, практикуються і контрольні математичні диктанти, коли вчитель пропонує учням запитання в письмовій або усній формі, а учні в порядку їх одержання дають письмові відповіді.

Індивідуальне опитування біля дошки

Під час такого опитування учні у розгорнутій логічній формі доводять теореми, розвиваючи усну математичну мову.

Опитування кількох (2—3-х) учнів біля дошки з паралельним виконанням письмової роботи рештою учнів Перевірка домашнього завдання шляхом написання учнями домашніх математичних творів

Особливу увагу слід приділяти поточному контролю знань у IX класі. Учні, що приходять з восьмирічної школи, приучені до певних прийомів роботи, і, якщо систематично не перевіряти їх знання, може трапитись, що, не працюючи систематично, вони не встигатимуть. Тут не можна забувати про принцип наступності, інакше неминучий різкий розрив між формами роботи у восьмирічній і середній школах, що може негативно позначитись на успішності старшокласників з математики.

Наведений перелік форм перевірки домашнього завдання і опитування учнів не вичерпує усіх можливих. Але навряд чи доцільно наводити їх більше. Учитель, який працює творчо, завжди зуміє в конкретних умовах застосувати ту форму контролю знань, яка дає найбільший ефект у навчанні і виявленні знань. Педагогічна майстерність і полягає в тому, щоб, володіючи різними методичними прийомами, застосовувати ті з них, які повніше відповідають завданню, що стоїть перед учителем у даному класі, на даному уроці.

Виконання учнями усних і письмових домашніх завдань оцінюється вчителем на всіх типах уроків.

ВИСНОВКИ

Про доцільність різноманітних організаційних форм і методів навчання, що застосовуються в практиці роботи передових учителів Кіровоградської області, можна судити з того, чи допомагають вони успішно розв'язувати навчально-виховні завдання школи, тобто чи сприяють якісному зростанню успішності учнів, розвитку ініціативи, самостійності і високих моральних якостей.

Які ж якісні показники успішності учнів ми маємо в експериментальних класах?

У березні 1963 р. в ряді експериментальних і контрольних класів Кіровоградським обласним відділом народної освіти і обласним інститутом удосконалення кваліфікації вчителів були проведені контрольні роботи, а також перевірка знань, умінь і навичок учнів у процесі відвідування уроків і занять математичних гуртків.

У табл. 1 показано наслідки контрольної роботи. З таблиці видно, що в експериментальних класах в середньому 70% старшокласників вчаться на «5» і «4», 28,3% — на «3» і 1,7% — не встигають. У контрольних класах в середньому 22,5% учнів вчаться на «5» і «4», 63,5% на «3» і 14% — не встигають.

З табл. 2 про результати екзаменів з математики в експериментальних класах за 1962/63 навчальний рік видно, що всі учні цих класів встигають, причому 76% з них закінчили навчальний рік з оцінками «5» і «4» і 24% — з оцінками «3».

Отже, результати експерименту доводять життєвість і педагогічну доцільність нових форм організації навчального процесу в старших класах. Сувора послідовність і чітка цілеспрямованість кожного типу уроків допомагає глибше засвоїти теоретичну частину курсу, встановити логічні зв'язки між темами, що вивчаються. Підготовчі уроки готують учнів до вивчення наступних нових тем, розділів програми, сприяють систематичному усуванню прогалин

у знаннях, забезпечують якісну підготовку до осмисленого засвоєння нового матеріалу.

На уроках тренувальних вправ, як і на інших типах уроків, створюються сприятливі умови для прищеплення учням навичок самостійної роботи, здійснення диференційованого підходу в навчанні старшокласників. Диференціація практичних завдань дає змогу здійснювати індивідуальний підхід до навчання кожного учня відповідно до рівня його знань, розвивати здібності кожного і добиватися значного підвищення успішності всіх учнів.

Нові форми організації навчального процесу створюють наступність між восьмирічною, середньою і вищою школами. Вони є перехідною ланкою від шкільних до вузівських методів навчання і сприяють кращій підготовці випускників середніх шкіл до занять у вищих навчальних закладах.

Проведений у школах Кіровоградської області експеримент показав, що при новій організації уроків з математики поряд з уроками розглянутих типів мають місце уроки, на яких здійснюється і подача нового матеріалу, і його закріплення, і опитування учнів, тобто уроки так званого комбінованого типу.

Під час експерименту багато ланок навчальної роботи видозмінювалося, уточнювалося і відшліфовувалося. Наприклад, на початку експерименту введення уроків-заліків сприймалося окремими вчителями як відмова від поточної перевірки знань. Такий погляд був помилковий: систематичний облік знань учнів експериментом не знімався. Уся історія дидактики доводить, що тільки при постійній і уміло організованій перевірці якості засвоєння учнями матеріалу вчитель матиме повну інформацію про рівень знань своїх вихованців. Експеримент підтвердив, що без систематичної зворотної інформації не можна досягти позитивних результатів в успішності учнів. Поточний облік знань — це не лише засіб нагромадження оцінок у класному журналі, він має на меті і глибокі навчальні завдання. Застосовуючи на уроках різні ефективні методи контролювання знань, вчителі добиваються активізації навчальної діяльності учнів, намагаються досягти в процесі контролювання знань навчального ефекту. Замість щоденного 20—25-хвилинного індивідуального опитування окремих учнів, учителі застосовують різні види самостійних робіт, індивідуальні завдання, практикують поурочний бал тощо і в усіх випадках

раціонально використовують навчальний час на контролювання знань.

Результати експериментальної роботи показали, що нова система уроків створює сприятливі умови для:

1) найраціональнішого розподілу і використання навчального часу для засвоєння учнями нових знань і умінь, формування практичних навичок;

2) систематичної роботи по усуненню прогалин у знаннях, розв'язання проблеми готовності учнів до засвоєння нових знань;

3) навчання учнів самостійно застосовувати знання на практиці;

4) здійснення наступності між восьмирічною, середньою і вищою школою;

5) розвитку творчих здібностей учнів, прищеплення їм любові та інтересу до предмета, здібностей до самоосвіти, самовиховання;

6) систематичного узагальнення, систематизації і об'єктивного контролювання знань, умінь і навичок учнів; досягнення навчаючого ефекту при контролюванні знань;

7) безперервної самоосвіти вчителя, підвищення його загальноосвітнього і методичного рівня.

Вся організація навчальної роботи сприяє ефективнішому розв'язанню і навчально-виховних завдань.

Відводячи значну частину часу на самостійну роботу, вчителі створюють умови для того, щоб учні набули умінь самостійно вчитися, навичок працювати з книгою, бо, як писав Вальтер Скотт: «Найбільшу частину свого виховання і освіти кожний з нас набуває собі сам».

Виконуючи різні самостійні диференційовані завдання, учні формують у собі такі риси характеру, як відповідальність, наполегливість, завзятість у доведенні роботи до кінця, впевненість і переконаність.

На уроках систематизації і узагальнення матеріалу (семінарах, заліках) учні розвивають свій математичний кругозір за рахунок ознайомлення з додатковим матеріалом: з питаннями історії математики, з могутністю математичних методів дослідження. Все це допомагає формуванню науково-матеріалістичного світогляду учнів і впевненості їх у силі та непогрішимості математичних істин.

Працюючи самостійно над підготовкою рефератів, математичних творів, старшокласники формують у собі навички

виділяти головне. Ці навички необхідні кожній культурній людині незалежно від профілю її роботи.

Застосування різних видів робіт сприяє розвитку уміння і бажання працювати творчо, економно, продуктивно.

Тепер досвід нової організації уроків вийшов далеко за межі Кіровоградської області і застосовується не тільки на уроках з математики, а й з інших предметів основ наук.

Додаток 1

Таблиця 1

Результати контрольних робіт, проведених у трьох варіантах за ступенем складності в експериментальних і контрольних класах окремих шкіл Кіровоградської області

№ п.п	Експериментальні класи	Предмет	Клас	Успішність у %			Контрольні класи	Клас	Успішність у %		
				«5» і «4»	«3»	«2»			«5» і «4»	«3»	«2»
1	Кіровоград, школа № 6	Алгебра	IX	90	10	—	Кіровоград, школа-інтернат № 2	IX X	26 10	70 80	4 10
		Геометрія Геометрія	X IX	76,5 74	23,5 26	— —	Кіровоград, школа № 27	IX X	38 15	46 77	16 8
2	Кіровоград, школа № 3	Алгебра Геометрія Геометрія	IX X XI	70 70 66,6	30 30 33,4	— — —	Кіровоград, школа № 32	IX	35	47,7	17,3
3	Кіровоград, школа № 14	Алгебра	IX	74	26	—	Кіровоград, школа № 7	IX X XI	15,3 20 30	81 70 70	3,7 10 —
4	Помошнянська школа № 2	Алгебра Геометрія Геометрія	IX X XI	56,6 68,5 82,2	41,6 31,5 17,8	1,8 — —	Помошнянська школа № 1	IX X XI	21 — 5,8	69 83,4 70,7	10 16,6 23,5

Продовження таблиці 1

№ п.п	Експериментальні класи	Предмет	Клас	Успішність у %			Контрольні класи	Клас	Успішність у %		
				«5» і «4»	«3»	«2»			«5» і «4»	«3»	«2»
5	Кремгес, школа № 2	Алгебра	IX	60.7	39,3	—	Кремгес, школа № 4	IX	9,6	84	6,4
		Геометрія	X	85	10	5					
		Геометрія	XI	57	35,7	7,3					
	Кремгес, школа № 1	Алгебра	IX	62,5	32,5	5					
		Геометрія	X	65	29,4	5,6					
6	Олександрія, школа № 6.	Алгебра	IX	76	20	4	Олександрія, школа-інтернат № 1	IX	30,7	65	4,3
								X	41	46	13
	школа № 15	Геометрія	X	78.8	15,2	6	Олександрія, школа № 14	IX	27,7	64	8,3
								X	26,7	70	3,3
7	Луганська школа Петрівського району	Алгебра	IX	60	40	—	Зеленська школа Петрівського району	IX	—	92,5	7,5
		Геометрія	X	79	16	5	Братолюбівська школа Петрівського району	X	21,5	78,5	—
								IX	35,8	58,8	5,4
8	Верблюзька школа Новгородківського району	Алгебра	IX	70	30	—	Вершинокам'янська школа Долинського району	IX	23,4	60	16,6
		Геометрія	X	52	48	—		X	—	52,7	47,3
							Долинська школа № 2	IX	27	49	24
								X	2,7	70	27,3

15-1/4 О. Хмура № 6839

Продовження таблиці 2

№ п п	Школа, вчитель	Клас	Предмет	Успішність				% успішності		
				«5»	«4»	«3»	«2»	«5» і «4»	«3»	«2»
5	Кіровоградська школа № 8, М. С. Скалєва	IX-А	Геометрія	16	5	5	—	81	19	—
	Л. П. Новиченко	IX-Б	Геометрія	15	11	7	—	79	21	—
6	Кіровоградська школа № 11, Р. Б. Єлисаветська	X	Алгебра	12	11	9	—	72	28	—
		XI	Геометрія (з тригонометрією)	6	6	3	—	80	20	—
7	Кіровоградська школа № 14, Т І Гетьман	IX-Б	Геометрія	11	12	5	—	82	18	—
8	Кіровоградська школа № 31, А. С. Стрижевський	IX	Геометрія	16	14	6	—	83	17	—
		X	Алгебра	6	11	5	—	77	23	—
9	Великовисківська школа Маловисківського району, М. В. Недзельський	IX	Геометрія	9	11	11	—	64	36	—
		XI	Геометрія (з тригонометрією)	10	7	5	—	72	28	—

Продовження таблиці 2

№ п.п	Школа, вчитель	Клас	Предмет	Успішність				% успішності		
				«5»	«4»	«3»	«2»	«5» і «4»	«3»	«2»
10	Помошнянська школа № 2, Г. Й. Пашковський	XI-А XI-Б	Геометрія (з тригонометрією)	6 2	15 13	3 6	— —	88 71	12 29	— —
11	Кремгесівська школа №2, В. Г. Коваленко	IX X XI	Геометрія Алгебра Геометрія (з тригонометрією)	7 8 5	8 5 7	8 7 4	— — —	65 65 75	35 35 25	— — —
12	Луганська школа Петрівського району, І. С. Задорожний	X	Алгебра	8	6	6	—	70	30	—
13	Доброведичківська школа-інтернат, Т. В. Кавун	XI	Геометрія (з тригонометрією)	13	10	4	—	85	15	—

Таблиця 3

Результати контрольних робіт, проведених в експериментальному класі Кремгесівської школи № 2 (вчитель В. Г. Коваленко) і контрольному класі кращої Кремгесівської школи № 3 (досвідчений учитель І. С. Осташко) в 1961/62 навчальному році

№ п.п	Школа	Тема	Клас	Написали работу на			
				«5»	«4»	«3»	«2»
1	Кремгесівська школа № 2	Прогресія	IX	6	9	6	2
				26,1%	39,1%	26,1%	8,7%
2	Кремгесівська школа № 3	Прогресія	IX	4	5	10	3
				18%	22%	45,4%	13,6%

З таблиці видно, що в експериментальному класі якісний рівень знань старшокласників значно вищий, ніж

Таблиця 4

Порівняльне співвідношення показників успішності в IX-А і IX-Б класах

Класи	Процент учнів, які виконали контрольні роботи										Підвищення успішності за період експерименту. Різниця чисел у графах				
	до початку експерименту на оцінку					після експерименту на оцінку									
	«5»	«4»	«3»	«2»	«1»	«5»	«4»	«3»	«2»	«1»	7 і 2	8 і 3	9 і 4	10 і 5	11 і 6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Алгебра															
Експериментальний IX-Б, 28 чол.	14	18	47	21	—	43	39	18	—	—	29	21	—29	—21	0
Контрольний IX-А, 26 чол.	19	27	39	15	—	23	27	42	8	—	4	0	3	— 7	0
Відносна ефективність експериментального фактора	0,7	0,7	1,2	1,4	—	1,9	1,4	0,4	0	—	1,2	0,7	—0,8	—1,4	0
Геометрія															
Експериментальний IX-Б	11	24	47	18	—	29	43	24	4	—	18	19	— 23	—14	0
Контрольний IX-А. . . .	19	27	42	12	—	19	30	39	12	—	0	3	— 3	0	0
Відносна ефективність експериментального фактора	0,6	0,5	1	1,5	—	1,5	1,4	0,6	0,3	—	0,9	0,9	—0,4	—1,2	0

Показники якісного

№ п.п	Школа, вчитель	Клас	Всього учнів	Успіш			
				до застосування лекційно-практичної системи			
				I півріччя 1961/62 навчального року			
				«5»	«4» і «5»	«3»	«2»
1	Маловисківська № 3, Є. М. Пасічник	IX X	57 49	4 —	14 —	37 —	2 —
				7%	24,6%	65%	3,4%
2	Маловисківська № 4, Н. Ф. Лега	IX-Б X-Б	31 27	6 —	11 —	14 —	— —
				19,4%	36%	44,6%	—
3	Олександрівська № 1, Г. Е. Чернявська	IX-А IX-Б X-А X-Б	92 80				

Примітка. Таблиця простежує роботу вчителя з тими ж самими

Порівняльні показники успішності з математики учнів

№ п.п	Школа, вчитель	Навчальний рік	Клас	Алгебра						
				«5»	«4»	«3»	«2»	% успішності на «5» і «4»	«3»	«2»
1	Помошнянська № 2, Г. Й. Пашковський	1961/62 1962/63	X XI							

Таблиця 5

зростання знань учнів

ність				Протягом навчальної чверті одержано оцінок						
за лекційно-практичною системою				до застосування лекційно-практичної системи				за лекційно-практичною системою		
I півріччя 1962/63 навчального року				II чверть 1961/62 навчального року				II чверть 1962/63 навчального року		
«5»	«4» і «5»	«3»	«2»	«5»	«4»	«3»	«2»	«5» і «4»	«3»	«2»
—	—	—	—							
6	22	20	1							
12,2%	45%	40,8%	2%							
—	—	—	—							
12	14	1	—							
44,4%	52%	3,6%	—							
				—	22	64	6	—	—	—
				—	—	—	—	37	43	—
				—	24%	70%	6%	46%	54%	—

учнями на протязі двох років.

Таблиця 6

IX—XI класів окремих експериментальних шкіл

Геометрія							Тригонометрія						
				% успішності на							% успішності на		
«5»	«4»	«3»	«2»	«5» і «4»	«3»	«2»	«5»	«4»	«3»	«2»	«5» і «4»	«3»	«2»
3	12	9	—	62,5	37,5	—							
6	15	3	—	87,5	12,5	—							
				25%									

№ п.п	Школа, вчитель	Навчальний рік	Клас	Алгебра						
				«5»	«4»	«3»	«2»	% успішності на «5» і «4»	% успішності на «3»	% успішності на «2»
2	Подорожнянська школа Кремгесівського району, А. Е. Хілкіна	1961/62	IX	2	5	20	3	24	66	10
		1962/63	X	8	10	11	1	60	37	3
								36%		
3	Успенська школа Кремгесівського району, Л. М. Башкатов	1960/61	X	1	3	16	—	20	80	—
		1962/63	X	3	5	11	—	47,4	52,6	—
								27,4%		
		1961/62	IX	2	6	11	—	42	58	—
		1962/63	X	6	5	8	—	58	42	—
								16%		
4	Кремгесівська № 2, В. Г. Коваленко	1961/62	VIII	5	9	19	—	17	83	—
		1962/63	IX	1	11	12	—	50	50	—
								33%		
		1960/61	VII	—	—	—	—	—	—	—
		1962/63	IX	—	—	—	—	—	—	—
		1961/62	IX	2	8	13	—	44	56	—
		1962/63	X	2	9	9	—	55	45	—
								11%		
		1961/62	IX	—	—	—	—	—		—
		1962/63	X	—	—	—	—	—		—
		1961/62	X	4	4	9	—	47	53	—
		1962/63	XI	6	5	5	—	69	31	—
								22%		
		1961/62	X	—	—	—	—	—	—	—
		1962/63	XI	—	—	—	—	—	—	—

Геометрія							Тригонометрія						
				% успішності на							% успішності на		
«5»	«4»	«3»	«2»	«5» і «4»	«3»	«2»	«5»	«4»	«3»	«2»	«5» і «4»	«3»	«2»
—	8	22	—	27	73	—	—	—	—	—	—	—	—
6	12	11	1	60	37	3							
				33%									
4	12	19	—	46	54	—							
3	11	10	—	60	40	—							
				14%									
3	7	13	—	44	56	—							
3	10	7	—	65	35	—							
				21%									
4	8	5	—	70	30	—							
7	4	5	—	70	30	—							
				0									

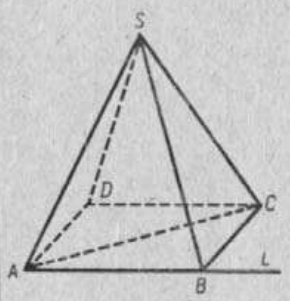
№ п.п	Школа, вчитель	Навчальний рік	Клас	Алгебра						
				«5»	«4»	«3»	«2»	% успішності на «5» і «4»	«3»	«2»
	Кремгесівська № 2, В. Г. Коваленко	1961/62	IX							
		1962/63	X							
		1961/62	X-Б							
		1962/63	XI-Б							
		1960/61	VIII	—	13	12	—	52	48	—
		1962/63	X	8	5	7	—	65	35	—
								13%		
		1961/62	X	—	—	—	—	—	—	—
		1962/63	XI	—	—	—	—	—	—	—
5	Великовисківська школа Маловисківського району, М. В. Недзельський	1959/60	XI	2	10	12	—	50	50	—
		1959/60	X	4	8	15	—	44,5	55,5	—
		1962/63	IX	5	13	13	—	58	42	—
		1962/63	XI	5	8	9	—	60	40	—
								15,5%		
6	Маловисківська школа № 3, Н. Ф. Лега	1961/62	IX	7	9	15	—	51,6	48,4	—
		1962/63	X	6	8	12	—	53,8	46,2	—
7	Маловисківська школа № 4, М. А. Бровченко	1961/62	VIII	5	11	15	2	48,5	45,5	6
		1962/63	IX	4	13	10	—	63	37	—
8	Олександрійська № 11, І. Т. Чорний	1961/62	X	—	—	—	—	—	—	—
		1962/63	XI							

Геометрія							Тригонометрія						
				% успішності на							% успішності на		
«5»	«4»	«3»	«2»	«5» і «4»	«3»	«2»	«5»	«4»	«3»	«2»	«5» і «4»	«3»	«2»
							4	5	13	1	39,5	56,5	4
							1	8	11	—	45	55	—
											5,5%		
							4	5	8	—	53	47	—
							7	3	6	—	62,5	37,5	—
											8,5		
3	7	13	—	43.5	56,5	—							
5	7	4	—	75	25	—							
				31,5%									
2	8	14	—	40	60	—	—	—	—	—	—	—	—
4	12	11	—	59.3	40,7	—	—	—	—	—	—	—	—
9	11	11	—	64.5	35,5	—	—	—	—	—	—	—	—
10	7	5	—	79.7	20,3	—	—	—	—	—	—	—	—
				39,7%									
8	12	11	—	64.5	35,5	—	7	12	12	—	61,3	38,7	—
2	9	15	—	42	58	—	6	8	12	—	53.8	46.2	—
2	11	19	1	40	57	3	—	—	—	—	—	—	—
3	13	11	—	60	40	—	3	13	13	—	55,2	44,8	—
3	13	25	—	40	60	—							
4	16	13	—	60	40	—							
				20%									

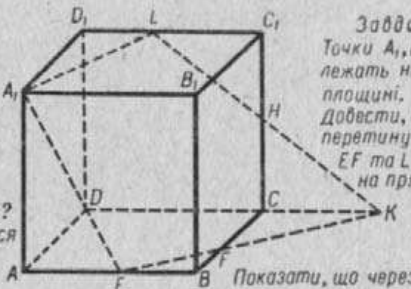
№ п.п	Школа, вчитель	Навчальний рік	Клас	Алгебра						
				«5»	«4»	«3»	«2»	% успішності на «5» — «4»	«3»	«2»
9	Петрівська № 1 Петрівського району, А. М. Підріз	1961/62	IX	3	19	24	—	48	52	—
		1962/63	X	11	13	18	—	57,1	42,9	—
								9,1%		
		1961/62	X	1	12	13	—	50	50	—
		1962/63	XI	3	8	10	—	52,4	47,6	—
								2,4%		
10	Долинська № 1 Долинського району, К. Я. Дробниця	1961/62	X							
		1962/63	XI							
11	Помошнянська № 2, Г. Й. Пашковський	1961/62	X							
		1962/63	XI							
12	Нікольська школа Вологодської обл., С. І Дурягіна	1961/62	X	2	4	17	—	26	74	—
		1962/63	XI	4	8	6	—	67	33	—
								41%		
13	Кремгесівська № 1	1961/62	X	—	6	20	—	23	77	—
		1962/63	XI	3	4	18	—	28	72	—
								5%		
14	Удмуртська АРСР, м. Глазов, школа № 6, А. Г. Вайнер	1961/62	X	—	—	—	—	—	—	—
		1962/63	XI	10	6	5	—	76,2	23,8	—
15	Ольшанська школа Добровеличківського району	1961/62	X	1	12	23	—	36	64	—
		1962/63	XI	4	17	15	—	58,4	41,6	—

Геометрія							Тригонометрія						
				% успішності на							% успішності на		
«5»	«4»	«3»	«2»	«5» і «4»	«3»	«2»	«5»	«4»	«3»	«2»	«5» і «4»	«3»	«2»
6	15	25	—	45,7	54,3	—	3	21	22	—	52	48	—
5	21	16	—	62	38	—	7	15	20	—	52,4	47,6	—
				16,3%							0,4%		
1	13	12	—	53,8	46,2	—	2	11	13	—	50	50	—
5	8	8	—	62	38	—	7	7	7	—	70	30	—
				8,2%							20%		
4	6	10	—	50	50	—							
5	7	8	—	60	40	—							
				10%									
4	11	9	—	62,5	37,5	—							
6	15	3	—	87,3	12,7	—							
				24,8%									
5	8	5	—	72	28	—							
—	6	20	—	23	77	—	—	6	20	—	23	77	—
2	8	15	—	40	60	—	2	4	19	—	24	76	—
				17%							1%		
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	5	9	—	57,1	42,9	—	—	—	—	—	—	—	—
—	16	20	—	44,4	55,6	—	—	12	24	—	32,3	66,7	—
5	15	16	—	55,6	44,4	—	17	13	16	—	55,6	44,4	—

ТАБЛИЦЯ 1

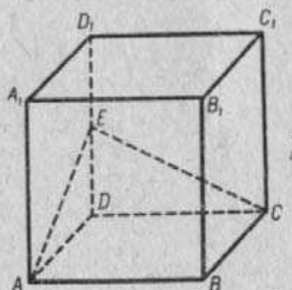


Завдання 1
Дано: SABCD – піраміда.
Чи належить точка L:
а) площині SAB;
б) площині SBC?
Скільки спільних точок мають площини SAD, SBA?
По якій лінії перетинаються площини SAC та ABCD?

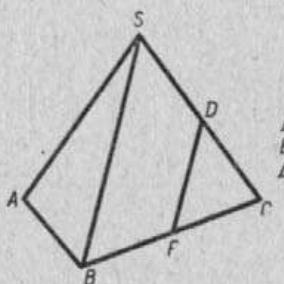


Завдання 3
Точки A_1, E, F, K, L лежать на одній площині.
Довести, що точка перетину прямих EF та LK лежить на прямій DC.

Показати, що через дві точки на рисунку можна провести пряму, рівновіддалену від пл. BB_1C_1C.



Завдання 2
Знайти лінію перетину площин AEC та BDD_1B_1.

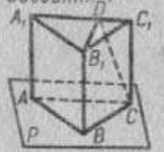


Завдання 4
Дана піраміда SABC;
BF = FC; CD = DS.
Довести: FD ∥ пл. SAB.

ТАБЛИЦЯ 2

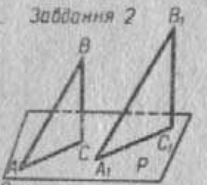
ПАРАЛЕЛЬНІ ПЛОЩИНИ

Завдання 1



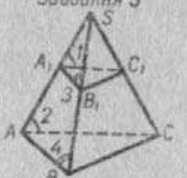
Дано: $AA_1 \parallel BB_1$; $BB_1 \parallel CC_1$; точки A, B, C лежать на площині P.
Довести: пл. ABC ∥ пл. $A_1B_1C_1$, описати положення лінії перетину пл. B_1DC і пл. P.

Завдання 2



Дано: $AB \parallel A_1B_1$; $BC \parallel B_1C_1$; точки A, C, A_1, C_1 лежать на пл. P
Довести: $AC \parallel A_1C_1$.

Завдання 3



Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$.
Довести: $BC \parallel B_1C_1$.

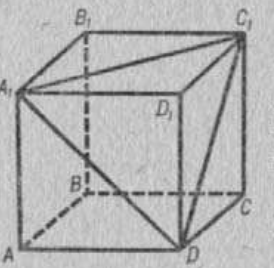
Завдання 4

Дано: AC_1 – куб; $AK = A_1K$; точки D_1, K, F, B лежать на одній площині.

Довести: $KF \perp D_1B$.

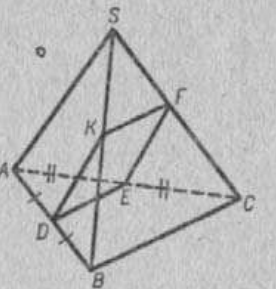
ТАБЛИЦЯ 3

ПРЯМІ В ПРОСТОРІ



Завдання 1

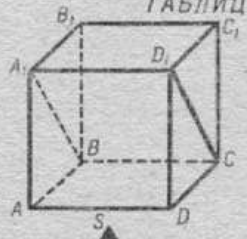
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб;
Показати в ньому дві паралельні, дві мимобіжні і дві прямі, що перетинаються.
Довести: $AA_1 \parallel CC_1$; $A_1C_1 \parallel$ пл. ABCD.



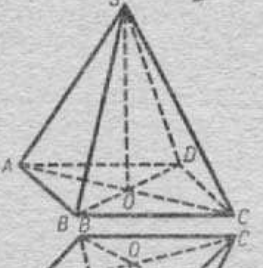
Завдання 2

Дано: $AD = DB$; $AE = EC$; точки D, K, F, E лежать на одній площині.
Довести: $KF \parallel BC$.

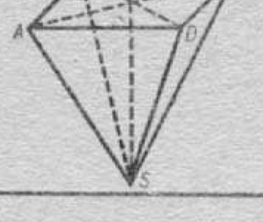
ТАБЛИЦЯ 4



Дано: AC_1 – куб;
$AB = a$.
Знайти: $S_{A_1BCD_1}$.

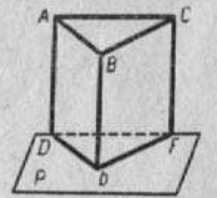


Дано: $SB = SD$;
$ABCD$ – квадрат.
Довести: $BD \perp$ пл. SAO.



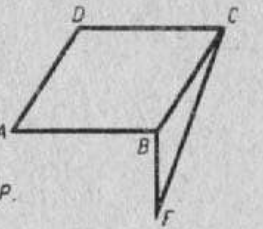
Дано: $ABCD$ – паралелограм;
$AS = SC$; $SD = SB$.
Довести: $SO \perp ABCD$.

ТАБЛИЦЯ 5



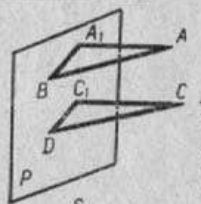
Завдання 1

Дано. $AD \perp$ пл. P;
$Bb \perp$ пл. P; $CF \perp$ пл. P;
$AD = Bb = CF$
Точки D, b, F лежать на пл. P
Довести: пл. $ABC \parallel$ пл. P.



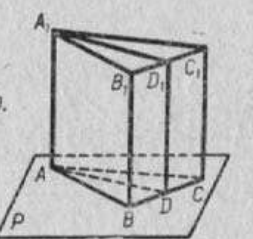
Завдання 4

Дано $ABCD$ – прямокутник;
$AB \perp BF$.
Довести: $\angle FCD = 90°$



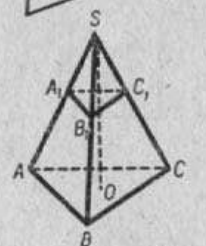
Завдання 2

Дано: $A_1B \parallel C_1D$;
$AA_1 \perp$ пл. P; $CC_1 \perp$ пл. P.
Прямі A_1B і C_1D лежать на пл. P. $AB = CD$.
Довести: $AB \parallel CD$.



Завдання 5

Дано: $AA_1 \perp$ пл. ABC; $BB_1 \perp$ пл. ABC;
$C_1C \perp$ пл. ABC; $B_1D_1 = D_1C_1$;
$BD = DC$.
Довести: $DD_1 \perp AD$.



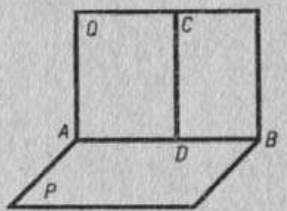
Завдання 3

Дано: $\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC}$

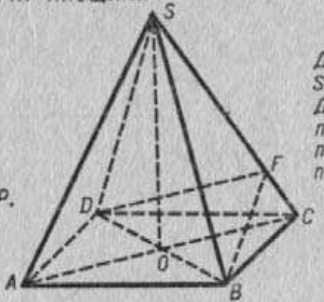
Довести:
$SO \perp$ пл. $A_1B_1C_1$.

ТАБЛИЦЯ 6

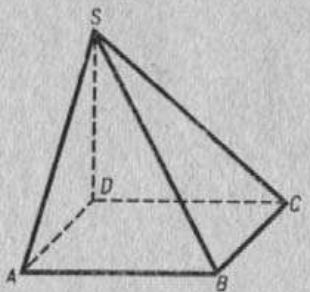
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПЛОЩИНИ



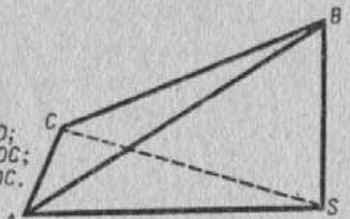
Дано: пл. Q ⊥ пл. P;
CD ⊥ AB; CD ⊂ пл. Q.
Довести: CD ⊥ пл. P.



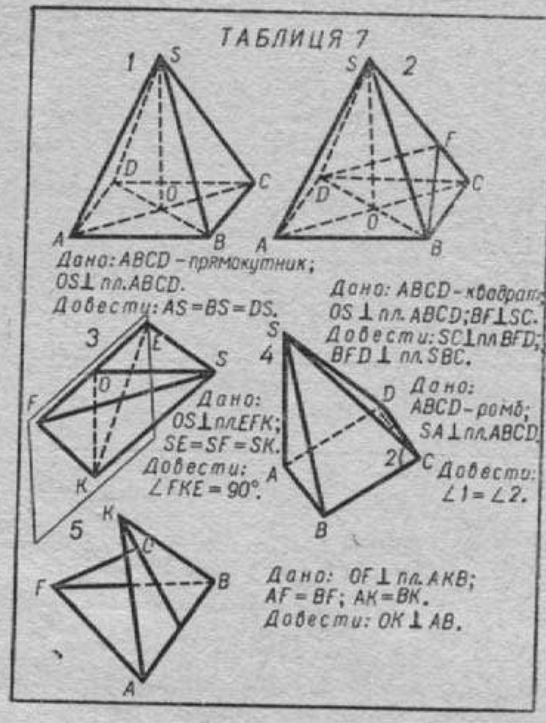
Дано: ABCD – квадрат;
SO ⊥ пл. ABCD.
Довести:
пл. SDB ⊥ пл. ABCD;
пл. SDB ⊥ пл. SAC;
пл. FDB ⊥ пл. SAC.



Дано: ABCD – квадрат;
пл. SAD ⊥ пл. ABCD;
пл. SDC ⊥ пл. ABCD.
Довести: а) SD ⊥ пл. ABCD;
б) пл. SAD ⊥ пл. SDC;
пл. SBC ⊥ пл. SDC.

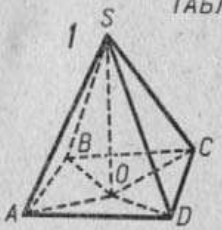


Дано: SB ⊥ BA; SB ⊥ BC; AC ⊥ BC.
Довести: пл. ABC ⊥ пл. SBC;
пл. SAC ⊥ пл. SBC.


ТАБЛИЦЯ 7
1
S
D
O
C
A
B
Дано: ABCD – прямокутник;
OS ⊥ пл. ABCD.
Довести: AS = BS = DS.
2
S
F
D
O
C
A
B
Дано: ABCD – квадрат;
OS ⊥ пл. ABCD; BF ⊥ SC.
Довести: SC ⊥ пл BFD;
BFD ⊥ пл SBC.
3
E
S
O
F
K
Дано:
OS ⊥ пл EFK;
SE = SF = SK.
Довести:
∠FKE = 90°.
4
S
D
A
2
C
B
Дано:
ABCD – ромб;
SA ⊥ пл. ABCD
Довести:
∠1 = ∠2.
5
K
D
F
B
A
Дано: OF ⊥ пл. AKB;
AF = BF; AK = BK.
Довести: OK ⊥ AB.

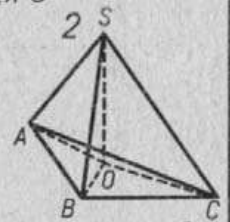
ТАБЛИЦЯ 8

1



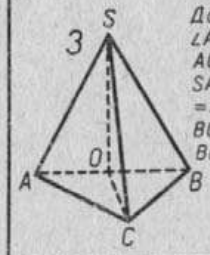
Дано: $SA=SB=SC=SD$; $SO \perp$ пл. $ABCD$.
Довести: O–центр кола, описаного навколо мн–ка $ABCD$.

2



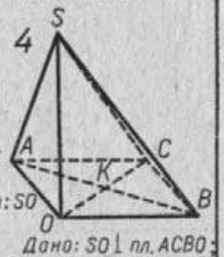
Дано: $\angle ACB=30°$; $SA=SB=SC=5$дм; $AB=4$дм; $SO \perp$ пл. ABC.
Визначити: SO.

3



Дано: $\angle ACB=90°$; $AC=8$дм; $SA=SB=SC=13$дм; $BC=6$дм
Визначити: SO

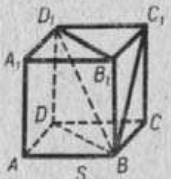
4



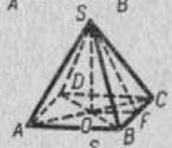
Дано: $SO \perp$ пл. $ACBO$; $SA=SB=SC=10$дм; $\angle ACB=120°$; $AC=CB=6$дм. Визначити: SO.

ТАБЛИЦЯ 9

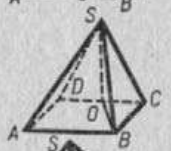
КУТ МІЖ ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ



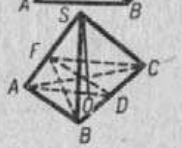
Дано: AC_1 – куб.
Показати кути між:
C_1B і пл. $ABCD$; DB і пл. ABB_1A_1; DB і пл. ADD_1A_1; D_1B і пл. $ABCD$; D_1B_1 і пл. BCC_1B_1; BB_1 і пл. $D_1C_1B_1$.



Дано: $ABCD$ – квадрат; $SO \perp$ пл. $ABCD$; $OF \perp BC$.
Показати кути між:
SB і пл. $ABCD$; SB і пл. OSF; SO і пл. SBC.



Дано: $ABCD$ – квадрат; $SO \perp$ пл. $ABCD$.
Показати кути між:
SB і пл. SDC; SB і пл. $ABCD$; SO і пл. SBC; SD і пл. SBC; SC і пл. $ABCD$; OB і пл. SDC.



Дано: $AB=AC$; $BD=DC$; $SO \perp$ пл. ABC.
Показати кути між:
SA і пл. BFC; SA і пл. SBC.

Додаток 3

Календарний план з арифметики, алгебри і геометрії в IX класі

№ п. п.	Прогалини в знаннях з теорії	Прогалини в уміннях і навичках	Параграф підручника	Задачі і приклади із збірника задач	Кількість годин	Домашнє завдання		Дата виконання
						спільне	індивідуальне	
			Арифметика					
1	Метричні системи мір Округлення цілих чисел	Додавання і віднімання на рахівниці	§ 45—49, § 7, § 16	№ 22 (4,5), 25, 27, 29, 15. 38	1	№ 86(2), 69(2), 70(1)	№ 432(1), 656, 703, 701	1.9
2	Закони додавання і множення	Множення на рахівниці	§ 10, 18	№ 89, 73				
3	Залежність між числами і результатами дій над ними	Роз'язування прикладів із дужками на всі дії, порядок дій	§ 26—29, § 25	№ 112, 1241	1	№ 496, 776, 1245(1)	№ 494, 1250(3), 1252(2), 1261	4.9
4	Зміна суми, різниці, добутку, частки в залежності від зміни даних чисел	Усна лічба	§ 30—33, § 15, 24	№45, 65, 91, 99(3)		№ 103	№ 101(1)	
5	Ознаки подільності чисел на 2, 3, 4, 5, 9, 25		§ 38, 39, 40		1			5.9

Продовження додатки 3

№ п.п	Прогалини в знаннях з теорії	Прогалини в уміннях і навичках	Параграф підручника	Задачі і приклади із збірника задач	Кількість годин	Домашнє завдання		Дата виконання
						спільне	індивідуальне	
6	Знаходження найбільшого спільного дільника і найменшого спільного кратного кількох чисел		§ 43, 44	№202 (1—6), 204		№202(15), 207(6)	№ 212, 213, 1270	
7		Приклади на всі дії з дробами	§ 97	№725, 768, 879	1	№874(2), 940(4)	№ 381(2), 910, 909	8.9
8	Звичайні дроби, які перетворюються у скінченні десяткові дроби, і ті, що перетворюються у нескінченні десяткові дроби. Періодичні дроби		§ 96 Алгебра, ч. II, § 88	№869, 870		Кисельов, ч. II, 146	Кисельов, ч. II, 147	
9		Дії з наближеними числами. Розв'язування задач на пропорціональне ділення, на суміші і сплави	§ 103—106, 126—127	№1014, 1023, 1038(II), 1234(I), 1238, 1240	1	№1041(1), 1331, 1231	№ 1040, 1336	11.9

№ п.п	Прогалини в знаннях з теорії	Прогалини в уміннях і навичках	Параграф підручника	Задачі і приклади із збірника задач	Кількість годин	Домашнє завдання		Дата виконання
						спільне	індивідуальне	
10	Основні задачі на проценти		§ 107—109	№1057(1), 1068(1), 1076(1)	1	№1055, 1067(2), 1080(1)	№1104, 1107	12.9
			Алгебра					
1	Абсолютна величина числа		§ 10		1		№555, 659	15.9
2	Формули скороченого множення		§ 41	№104.486, 560		№564		
3	Множення упорядкованих многочленів		§ 39	№436, 462	1	№438 461		18.9
4	Розкладання на множники		§ 55, 56 57	№931, 934		№948	№937	
5		Вправи на всі дії з алгебраїчними дробами	§ 58	№1134(1)		№1134(2)	№1157(1)	

Продовження додатка 3

№ п.п.	Прогалини в знаннях з теорії	Прогалини в уміннях і навичках	Параграф підручника	Задачі і приклади із збірника задач	Кількість годин	Домашнє завдання		Дата виконання
						спільне	індивідуальне	
6	Поняття про тотожність і рівняння. Поняття про еквівалентність рівнянь. Дві основні властивості рівнянь		§ 46—48, § 77	№723	1	№743—747		19.9
7	Поняття про нерівність. Властивості нерівностей. Розв'язування найпростіших нерівностей 1-го степеня з одним невідомим		Кисельов ч. II, § 63—64, 71	Кисельов ч. II, №107, 109		Кисельов ч. II, №108	Кисельов ч. II, №110—113	
8	Пряма і обернена пропорціональність. Побудова графіків рівнянь: $y = kx$; $y = \frac{k}{x}$		Барсуков, § 73, 76	Кисельов ч. II, №57, 58, 62, 63	1	Кисельов ч. II, №59, 67	Кисельов ч. II, №70, 66	22.9
9	Побудова графіків рівнянь: $y = ax + b$; $ax + by + c = 0$		Барсуков, § 75	№68, 69				

№ п.п	Прогалини в знаннях з теорії	Прогалини в уміннях і навичках	Параграф підручника	Задачі і приклади із збірника задач	Кількість годин	Домашнє завдання		Дата виконання
						спільне	індивідуальне	
10	Система рівнянь 1-го степеня з двома невідомими. Поняття про еквівалентність систем. Розв'язування систем способом підстановки і способом алгебраїчного додавання. Геометричне пояснення можливих розв'язків системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими		Барсуков, § 78—81	№1337(2), 1343(1), 1347(1), 1348(1), 1352(1)	1	№1337(2), 1343(2), 1347(2), 1345(2), 1352(2)	№1368(1), 1376(1)	25.9
11	Добування квадратного кореня з додатнього числа (точно і наближено). Використання таблиці квадратних коренів.		Барсуков, § 95, 96, 99	№1547, 1543, 1579	1	№1547, 1544, 1580	№1598, 1599	26.9
12	Поняття про дії над ірраціональними числами		Кисельов ч. II, §10		1			
13		Таблиці квадратів, кубів і обернених чисел	§ 90, 126	№1521, 1840		№1520, 1841		29.9

Продовження додатка 3

№ п.п	Прогалини в знаннях з теорії	Прогалини в уміннях і навичках	Параграф підручника	Задачі і приклади із збірника задач	Кількість годин	Домашнє завдання: спільне	Домашнє завдання: індивідуальне	Дата виконання
14	Квадрат многочлена		Кисельов ч. II, § 4, 5	Кисельов ч. II, №4, 6, 8	1	Кисельов ч. II, №5, 7, 9	Кисельов ч. II, №10	2.10
15	Степінь наближеного числа і квадратний корінь з нього							
16		Приведення радикалів до найпростішої форми. Дії над радикалами	Кисельов ч. II, § 16, 18	Кисельов ч. II, № 13, 16, 24	1	Кисельов ч. II, № 12, 15, 18, 31, 32, 36		6.10
17				№ 27, 34, 35, 38, 39				
18		Приведення до раціонального виду чисельника або знаменника дробового ірраціонального виразу	Кисельов ч. II, § 20	Кисельов ч. II, № 46, 48, 50	1	Кисельов ч. II, № 47, 49, 51		9.10
19	Дослідження коренів квадратного рівняння за його дискримінантом і коефіцієнтами		Кисельов ч. II, § 42, 43	Кисельов ч. II, № 71, 73, 75	1	Кисельов ч. II, № 72, 74		10.10

№ п.п	Прогалини в знаннях з теорії	Прогалини в умінях і навичках	Параграф підручника	Задачі і приклади із збірника задач	Кількість годин	Домашнє завдання		Дата виконання
						спільне	індивідуальне	
20		Розв'язування задач за допомогою складання квадратних рівнянь		Ларічев ч. I, №1693, 1702, 1714, 1733, 1743	1	Ларічев ч. I, №1703, 1705, 1715, 1734, 1748	Ларічев ч. I, №1738, 1928	13.10
21	Ірраціональні рівняння (випадки втрати коренів і появи сторонніх коренів)		Кисельов ч. II, § 21—23	Кисельов ч. II, № 52, 53, 54	1			16.10
22	Квадратна функція і її графіки: 1) $y = x^2$; $y = ax^2$; 2) $y = ax^2 + b$; $y = (x \pm m)^2$; $y = a(x \pm m)^2$; 3) $y = ax^2 + bx + c$		Кисельов ч. II, § 46—49	Ларічев ч. I, № 1804, 1823	1	Ларічев ч. I, №1824, 1827	Ларічев ч. I, №1831, 1832, 1828—29	17.10

Продовження додатка 3

№ п.п	Прогалини в знаннях з теорії	Прогалини в уміннях і навичках	Параграф підручника	Задачі і приклади із збірника задач	Кількість годин	Домашнє завдання: спільне	Домашнє завдання: індивідуальне	Дата виконання
23	Системи рівнянь, що розв'язуються особливими способами; а) $x \pm y = a$; $xy = b$; б) $x^2 \pm y^2 = a$; $x \pm y = b$; в) $x^2 \pm y^2 = a$; $xy = b$		Кисельов ч. II, § 60, 61	Кисельов ч. II, № 97—100	1	Кисельов ч. II, № 97—100	Кисельов ч. II, № 101	20.10
24	Підсумковий урок				2			23—24.10
			Геометрія					
1	Поняття про аксіому, теорему, визначення, теорему пряму і обернену		Нікітін, Геометрія § 29		1			3.9
2	Огляд практичних занять з геометрії		§ 7, 8, 10, 13, 41, 56 § 89, 101, 103	Нікітін, Маслова	1			10.9
3	Види симетрії. Симетричні перетворення фігур		§ 17, 45	№ 136, 138	1	№ 137, 140	№ 139, 142	17.9

№ п.п	Прогалини в знаннях з теорії	Прогалини в уміннях і навичках	Параграф підручника	Задачі і приклади із збірника задач	Кількість годин	Домашнє завдання		Дата виконання
						спільне	індивідуальне	
4	Геометричні місця точок		§ 12, 32					
5	Основні задачі на побудову		§ 28		1			24.9
6	Метод геометричних місць		Конспект учителя		1	Різні збірникизадач		1.10
7	Інші методи розв'язування задач на побудову (подібність, алгебраїчний)				2			8,15.10
8	Класифікація чотирикутників		§ 46		1			22.10
9	Вимірювання кутів: центрального та вписаного кута; кута з вершиною всередині кола, поза колом; кута, утвореного дотичною і хордою		§ 13, 76	№661, 670	1	№662, 672	№ 669, 675	27.10

Продовження додатка 3

№ п.п	Прогалини в знаннях з теорії	Прогалини в уміннях і навичках	Параграф підручника	Задачі і приклади із збірника задач	Кількість годин	Домашнє завдання: спільне	Домашнє завдання: індивідуальне	Дата виконання
10	Задачі на побудову: а) знайти центр даного кола; б) поставити перпендикуляр з кінця даного променя, не продовжуючи його; в) проведення дотичної до кола; г) на даному відрізку прямої побудувати сегмент, що вміщує даний кут		§ 32, 37, 47, 69, 73, 85, 95, 111		1	№724 (1, 2), 664, 620, 629		29.10
11		Задачі на доведення		№ 821, 824, 812, 456(1), 534(2)	1	№417, 453, 459	№425, 440, 456(2)	30.10
12	Чотири визначні точки трикутника		§ 15, 50, 105					
13	Підсумковий урок				1			31.10

ЗМІСТ